

华罗庚经济优化理论的探索

陈木法

(江苏师范大学 北京师范大学)

上海师大 杰出学者讲座

2022 年 10 月 15 日

05:48:16

- 华罗庚经济优化模型, 修正与更新;
- 产品(产业)等级(排序)与稳定性分析;
- 预测与调整及经济结构的优化.

1 投入产出模型, 华理论及修正与更新

所关心的产品所构成的**产综** [固定单位: 甬, 吨,...]:

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \dots, \boldsymbol{x}^{(d)}).$$

考察当前经济的三种数据

- 去年的投入: $\boldsymbol{x}_0 = (\boldsymbol{x}_0^{(1)}, \boldsymbol{x}_0^{(2)}, \dots, \boldsymbol{x}_0^{(d)})$
- 今年的产出: $\boldsymbol{x}_1 = (\boldsymbol{x}_1^{(1)}, \boldsymbol{x}_1^{(2)}, \dots, \boldsymbol{x}_1^{(d)})$
- 结构方阵 (消耗系数方阵): $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ (假定时齐). 每生产一个单位的 i 类产品, 需消耗 a_{ij} 个单位的 j 类产品. $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{A}$

投入产出法

$$\boldsymbol{x}_{n-1} = \boldsymbol{x}_n \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_n \boldsymbol{A}^n; \quad \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}_0 \boldsymbol{A}^{-n}, \quad n \geq 1.$$

非负、不可约矩阵的三大特征

$A = (a_{ij})$. 边: $i \rightarrow j, a_{ij} > 0$. 连通图=不可约.

定理 (Perron-Frobenius 1907, 1912)

每一非负、不可约矩阵都有**三大特征**:

- **最大特征值** $\rho(A)$ 是正的单重特征值.
- **最大左特征向量** u (行向量)为正.
- **最大右特征向量** v (列向量)为正.

左、右正特征向量 u (行)与 v (列): $\rho = \rho(A)$

$$uA = \rho u, \quad Av = \rho v.$$

$\forall \lambda: |\lambda| \leq \rho(A)$, 若 A 含一个正对角元素, 则仅有 $<$.

华老的探索

华于 1985.6.12. 仙逝. XI: 写于 1985.4.20

文章	杂志	收/发日期
简介	优选管理	1984/6/15 发
I-VII, IX	科学通报	1983/10/18 收
VIII	科学通报	1984/3/6 收
英文	美国	1984/5 收
X	科学通报	1984/11/22 收
XI	科学通报	1985/7/25 收

其中 I-VII, IX 分 5 文发表: I, II-III, IV-VI, VII, IX

华老的探索

华于 1985.6.12 仙逝. XI: 写于 1985.4.20

文章	杂志	收/发日期
+ 华苏	数学通报	1985/8/29 (发)
书	财政经济	1985 序言. 1987 发
文集, 应用 II	科学出版社	I-X, 王元改写. 2010

论文: 11 篇; 书: 2 部; 还有本人未见到的
《数学方法与国民经济》1982, 未发表手稿.

用颜色
标记
对原
稿的
修改

华罗庚基本定理. 左正特征向量法

无消费情形: $x_{n-1} = x_n A, \quad n \geq 1.$

$$\rho(A) = \lambda_{\max}(A), \text{ 左 } u \text{、右 } v$$

- 最好的投入 $x_0 =$ **最大左特征向量** u .
此时有最佳发展速度 $1/\rho(A)$. **优化 1:** $x_0 = u$
- 否则, 必然走向失衡或崩溃, 即

失衡时 $T_{x_0} = \inf\{n: x_n \text{ 的某个分量} \leq 0\} < \infty.$

崩溃时 $T_{x_0}^+ = \inf\{n: x_n \text{ 的某个分量} < 0\} < \infty.$

前所未有的贡献是**优化 2:** $T_{x_0}^+ = \infty \implies x_0 = u.$

先前平衡解源于不动点定理, 华理论可计算

例. 华取自 W. Leontief, 1965. 敏感性

$$A = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 25 & 14 \\ 40 & 12 \end{bmatrix}, \quad \text{农业、制造业}$$

$$\rho(A) = \frac{1}{200} (37 + \sqrt{2409}) \approx 0.430408,$$

$$u = \left(\frac{5}{7} (13 + \sqrt{2409}), 20 \right) \approx (44.34397483, 20).$$

$$x_0 = (44.344, 20). \quad T_{x_0} = 8. \quad 1/\rho(A) \approx 2.3. \quad [x_0 \text{ 取整数: } 3; \text{ 取全: } 13]$$

n	1	2	3
x_n	(103.028, 46.4677)	(239.375, 107.96)	(556.111, 250.868)
n	4	5	6
x_n	(1292.85, 582.247)	(2990.66, 1362.96)	(7165.52, 2998.2)
n	7	8	
x_n	(13054.5, 9754.73)	(89821.2, -23501.9) (2)	

带消费实用模型. 投入 $y_n = y_0((1-\alpha)A^{-1} + \alpha I)^n$

论文	收、发日期
IV	1983/10/18 收
英文	1984/5/4 收
X	1984/11/22 收
XI	1985/4/20 写[之前工作的小结]
H+H	1985/8/29 发
书	写 '85, 出版 '87. 仙逝 '85/6/12

次序	表达式	文献
(1)	$x_n - \xi_n = x_{n+1}A$, ξ_n : 消费量	IV, 英文
(2)	(1) 的左边 $\rightarrow y_n$	X, H+H
(3)	(1) 中取 $\xi_n = \gamma(x_{n+1} - x_n)$	书

情形 (2): $y_n = y_0((1-\alpha)A^{-1} + \alpha I)^n$

第 1 年取增产的 $\alpha \in (0, 1)$ 倍作为消费, 余下可用于再生产的产综为

$$y_1 = x_1 - \alpha(x_1 - x_0) = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_0.$$

以 $x_1 = x_0 A^{-1}$ 代入上式, 并改写 $y_0 = x_0$, 得出如上的 y_1 . 一般地, 第 n 年可用于第 $n+1$ 年生产的产综为

$$x_n = y_{n-1} A^{-1}$$

$$y_n = x_n - \alpha(x_n - y_{n-1}) = y_{n-1}((1-\alpha)A^{-1} + \alpha I).$$

情形 (3):

1985 写, 1987 出版

$$x_n - \gamma(x_{n+1} - x_n) = x_{n+1} A,$$

$$x_n = x_{n+1} A_\gamma, \quad A_\gamma = \frac{A + \gamma I}{1 + \gamma}.$$

$$\gamma \in (0, 1)$$

华的更新与新挑战

带消费实用模型[1985/87 书]. 消费比例 $\gamma \in (0, 1)$.

$x_0 = x_n A_\gamma^n$, $n \geq 1$, 更新: 回到非负阵[无消费]

$$A_\gamma = \frac{A + \gamma I}{1 + \gamma}, \quad \rho(A_\gamma) = \frac{\rho(A) + \gamma}{1 + \gamma}.$$

华文集 9 卷, 2010. 应数 II, (I)-(X)+王元文. 9 行.

未收入华原著. 36 年后才被唤醒, 2021 秋(陈).

$\rho := \rho(A) < 1$ (假设). 经济增长速度: $\gamma \uparrow \infty?$

$$\frac{1}{\rho(A_\gamma)} - 1 = \frac{1 - \rho}{\gamma + \rho} \downarrow \frac{1 - \rho}{1 + \rho} > 0, \quad \gamma \uparrow 1 \quad \rho = 0.6$$

华氏基本定理. 修正与再更新

带消费实用模型[新]. 消费倍数 $\gamma := \frac{\alpha}{1-\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$.

$$(4) \quad x_0 = x_n A_\alpha^n, \quad n \geq 1,$$

$A_\alpha = (1 - \alpha)A + \alpha I$. 回到非负阵. $A_0 := A$.

[无消费算子 A 与无增长算子 I 的凸组合]

$\rho(A_\alpha) = (1 - \alpha)\rho(A) + \alpha$. $A_\alpha (\alpha < 1)$ 同 u, v

倍数: $\gamma = \frac{\alpha}{1 - \alpha}$. 增长很小时需倍数很大[平衡].

旧算子 (2)	新算子 (4)
$B_\alpha = (1 - \alpha)A^{-1} + \alpha I$	$A_\alpha = (1 - \alpha)A + \alpha I$
实矩阵, 整个谱	非负矩阵, 最大特征对

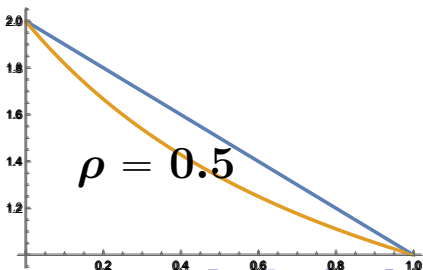
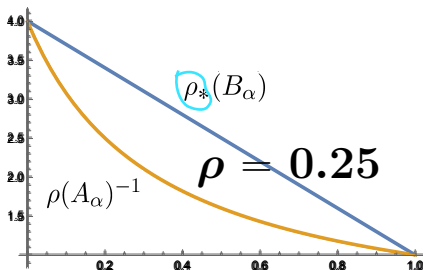
两种方法的发展速度比较

$$(4) \quad \rho(A_\alpha)^{-1} = ((1 - \alpha)\rho(A) + \alpha)^{-1};$$

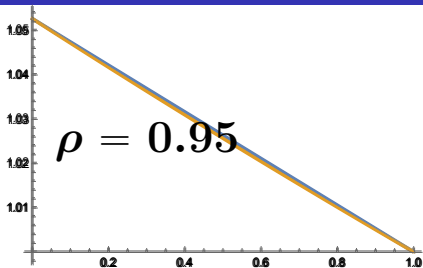
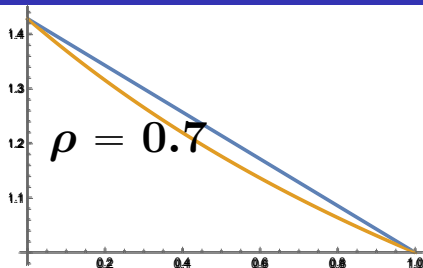
$$(2) \quad \rho_*(B_\alpha) = (1 - \alpha)\rho(A)^{-1} + \alpha, \quad \alpha \in [0, 1].$$

简记 $\rho = \rho(A) \in (0, 1)$, 则对于 $\alpha \in [0, 1]$:

$$\rho_*(B_\alpha) - \frac{1}{\rho(A_\alpha)} = \frac{\alpha(1 - \alpha)(1 - \rho)^2}{\rho[(1 - \alpha)\rho + \alpha]} \geq 0.$$



两种方法的发展速度比较及一实例



例 (1997 年山东省 6 部门投入产出表).

$$A = \begin{bmatrix} .106525 & .140497 & 10^{-6} & .001946 & .166163 & .004297 \\ .10464 & .531081 & .001836 & .02247 & .060775 & .027266 \\ 0 & .606984 & .000324 & .04405 & .029865 & .040428 \\ .002742 & .277311 & .015089 & .082288 & .034568 & .061835 \\ .013753 & .219445 & .035205 & .06774 & .049044 & .176096 \\ .004744 & .219056 & .0454 & .040897 & .018104 & .091463 \end{bmatrix}$$

$\rho(A) = .651093$. 特征值全为正, 投入空间为 1 维 $\{u\}$.

$u = (9.39469, 47.5425, 1, 3.29471, 7.7896, 5.27587)$

两种方法的稳定性比较

上述 u 在第 3 个分量处归一化. 下面从它出发, 取 3 个初值:

$$x_0^{(1)} = (9, 48, 1, 3, 8, 5) \quad (\text{整数部分})$$

$$x_0^{(2)} = (9.395, 47.543, 1, 3.295, 7.79, 5.276) \\ (\text{小数点后三位})$$

$$x_0^{(3)} = u \quad (\text{全六位}).$$

关于这 3 个初值, 对于不同的 α , 使用新法 (4) 得出崩溃时间如下表:

两种方法的稳定性比较

使用新法 (4): $x_n = x_{n-1} A_{\alpha}^{-1}$

$T_{x_0} \backslash \alpha$ x_0	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{6}$
$x_0^{(1)}$	3(5)(4)	3(5)(4)	3(5)(4)	6(5)(4)	7(5)	21(5)
$x_0^{(2)}$	12(3)	16(3)	17(3)	23(3)	32(3)	93(3)
$x_0^{(3)}$	14(3)	19(3)	20(3)	28(3)	38(3)	113(3)

$$T_{x_0} = T_{x_0}^+$$

崩溃产品依 u 的等级序为 ③, ④, ⑤.

两种方法的稳定性比较

C+Y.S. Li (2019)

使用旧法 (2): $y_n = y_{n-1}((1 - \alpha)A^{-1} + \alpha I)$

例 35

$T_{x_0} \backslash \alpha$	2	3	2	1	3	5
$x_0 \backslash$	7	8	5	2	5	6
$x_0^{(1)}$	1	2	2	2	2	2
$x_0^{(2)}$	4	4	4	5	5	7
$x_0^{(3)}$	6	6	6	7	7	10

$$T_{x_0} = T_{x_0}^+.$$

结论: 新法比旧法的稳定性强很多. 因为两法的投入的解空间均为 1 维(参见 [H+H; 定理 2]); 由上述发展速度的比较知结论合理. 对于两产品的华模型, 当 $\alpha > 185/211$ 时, 解空间为 2 维.

- 经济最优化的随机模型 (I)、(II) [1989/9], 1992
- 经济最优化的数学理论 (讲义) [1990/3].
韩东、胡锡健 (2003), 《经济和金融数学模型
的理论与实践》. 新疆自治区计委
- 陈 & 李勇, 1994.
- 《随机过程导论》(陈 & 毛永华), 开篇 [初稿
1999], 2007. 英文版 2021.
- 小书《Eigenvalues, Inequalities and ...》第 10 章.
- 陈 & 李月爽, 2019: 计算.
- 一年多来的新进展.
- 主页上的视频

一年多来的新进展

- 华罗庚经济优化模型, 修正与更新;
- 产品(产业)等级(排序)与稳定性分析;
- 预测与调整及经济结构的优化.

两文

关键变换

- 陈 (2022): 华罗庚经济最优化理论的新进展.
应用概率统计 38(2): 159-178.
- 陈彬, 陈, 谢颖超, 杨婷, 周勤 (2022):
经济系统的产品排序与结构优化.
应用概率统计 38(4): 475-504.

关键变换(高级: 任意正的 w)

D_w : 以向量 $w = (w^{(k)} : k \in E)$ 作为对角线元素的对角矩阵.

$$\frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} = D_w^{-1} \frac{A}{\rho(A)} D_w, \quad w > 0.$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} \right)^n = D_w^{-1} \left(\frac{A}{\rho(A)} \right)^n D_w, \quad n \geq 1.$$

$$A \rightarrow A_\alpha, \quad \alpha < 1.$$

关键变换(初级) $A \rightarrow P$. $u \odot v$ 分量积

$$A_w = D_w^{-1} \frac{A}{\rho(A)} D_w, \quad w > 0 \quad \boxed{D_w x = w \odot x}.$$

定理 (陈 1989/1992)

- A_w 成为转移概率 P 当且仅当 $w = v$.
- P 的左特征向量为 $\mu := u \odot v$, 归一化为 $\pi := u \odot v / (uv)$. 平稳分布 $\pi = \pi P = \pi P^n$.

证明 不妨设 $\rho(A) = 1$. 那么 1: 分量恒为 1 的列向量

$$A_w \mathbb{1} = D_w^{-1} A D_w \mathbb{1} = D_w^{-1} A w \stackrel{?}{=} \mathbb{1}$$

第一项断言成立当且仅当 $A w = D_w \mathbb{1} = w$.

关键变换(初级)

第二项断言: $u \odot vP = u \odot v$

$$\begin{aligned} u \odot vP &= u \odot vD_{v^{-1}}AD_v = u \odot v \odot v^{-1}AD_v \\ &= uAD_v = uD_v = u \odot v. \quad \square \end{aligned}$$

30 年前引进 P 是为理解“崩溃”这个神奇要点:
马氏链平稳分布存在唯一:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \mathbb{1}\pi \text{ (每行均为 } \pi \text{ 的方阵),}$$

[此处需 P 的非周期假定, 但 $P_\alpha (\alpha \in (0, 1))$ 总满足]
先逐点, 然后一致(因矩阵有限).

$$A_\alpha = (1 - \alpha)A + \alpha I \rightarrow P_\alpha$$

$$\rho(A_\alpha) = (1 - \alpha)\rho(A) + \alpha,$$

$$\begin{aligned} P_\alpha &= D_{v^{-1}} \frac{A_\alpha}{\rho(A_\alpha)} D_v \quad (A_\alpha \text{ 与 } A \text{ 有相同的 } v) \\ &= \rho(A_\alpha)^{-1} [(1 - \alpha) D_{v^{-1}} A D_v + \alpha I] \\ &= \rho(A_\alpha)^{-1} \left[(1 - \alpha) \rho(A) D_{v^{-1}} \frac{A}{\rho(A)} D_v + \alpha I \right] \\ &= (1 - \beta_\alpha) P + \beta_\alpha I, \quad \beta_\alpha := \alpha / \rho(A_\alpha). \end{aligned}$$

引理 (陈 2022)

相应于 A_α , 我们有 P_α 如上. 进而 P_α ($\alpha < 1$) 有相同的左、右特征向量 $u \odot v$ 与 $\mathbb{1}$.

2. 产品(产业)等级(排序)与稳定性分析

概括地讲, 使用 P 的**两大优点**:

- μ 综合了 A 的三大特征, 而 u 仅用其中两个.
- 使用 P 或 A 的稳定性完全重合, 但前者的振幅远小于后者.

应用于特征向量 v 的计算. 幂法或反幂法:

第一、二拟对称化技术: 抹平矩阵元素, 拉直 v .

1) 将两头拉平; 2) 硬算求更好者, 可实现; 3) 回到 $A \rightarrow P$:

$$P = D_v^{-1} \frac{A}{\rho(A)} D_v, \quad \bar{P} = D_{\tilde{v}}^{-1} A D_{\tilde{v}}.$$

$$\tilde{v} \sim v \implies \bar{v} \sim \text{constant } \mathbb{1}.$$

2. 产品(产业)等级(排序)与稳定性分析

应用于大矩阵特征对的计算. 以 P 为例, 如矩阵阶很大, 其 μ 的某些分量可能溢出. 此时我们引进重排序方法. 将 μ 的分量从大到小重新排序, 导出指标 $(1, \dots, d)$ 的一个重排 τ . 进而得到新的 $\tilde{P}$. 可证两者有相同的稳定性.

部分分量(指标), 如 $\geq 10^{-12}$, 重排.

用于大稀疏阵特征对计算: 6万、2百万阶, 前 6 个.

C. & R.R. Chen. Top Eigenpairs of Large Scale Matrices. CSIAM Trans. Appl. Math. 2022, 3(1).

稳定性分析. 华取自 W. Leontief, 1965

$$A = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 25 & 14 \\ 40 & 12 \end{bmatrix}, \quad \text{农业、制造业}$$

$$\rho(A) = \frac{1}{200} (37 + \sqrt{2409}) \approx 0.430408,$$

$$u = \left(\frac{5}{7} (13 + \sqrt{2409}), 20 \right), \quad \text{左}$$

$$v = \left(\frac{1}{80} (13 + \sqrt{2409}), 1 \right)^* . \quad \text{右}$$

$$P = \frac{1}{\rho(A)} D_{v^{-1}} A D_v.$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{5}{104}(-37 + \sqrt{2409}) & \frac{1}{104}(289 - 5\sqrt{2409}) \\ \frac{1}{130}(241 - 3\sqrt{2409}) & \frac{3}{130}(-37 + \sqrt{2409}) \end{bmatrix}.$$

$$u \times 20 \approx (44.34397483, 20).$$

$$\begin{aligned} \mu \times 20 &= \left(\frac{1289 + 13\sqrt{2409}}{56}, 20 \right) \\ &\approx (34.41179182, 20). \end{aligned}$$

$$u \odot v \times 20 \approx (34.41179182, 20).$$

$x_n = x_0 A^{-n}$ 与 $\mu_n = \mu_0 P^{-n}$ 的比较.

$$\mathbf{x}_0 = (44.344, 20). \quad T_{\mathbf{x}_0} = 8. \quad 1/\rho(A) \approx 2.3$$

相同的稳定性

n	1	2	3
x_n	(103.028, 46.4677)	(239.375, 107.96)	(556.111, 250.868)
n	4	5	6
x_n	(1292.85, 582.247)	(2990.66, 1362.96)	(7165.52, 2998.2)
n	7	8	
x_n	(13054.5, 9754.73)	(89821.2, -23501.9) (2)	

$\mu_0 = (34.4118, 20)$. $T_{\mu_0} = 8$. $\rho(P) = 1$ 相同的崩溃时间和产品

n	1	2	3
μ_n	(34.4118, 20.0001)	(34.4122, 19.9996)	(34.4092, 20.0026)
n	4	5	6
μ_n	(34.4303, 19.9815)	(34.28, 20.1318)	(35.351, 19.0608)
n	7	8	
μ_n	(27.7201, 26.6917)	(82.0905, -27.6787) (2)	

差别 $\frac{89821.2}{82.0905} = 1094$. 只是 2×2 方阵.

L-华模型稳定性. 使用 $P_\alpha: \mu_n = \mu_0 P_\alpha^{-n}$

$T_{\mu_0} \backslash \alpha$	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$
μ_0					
$\mu_0^{(1)}$	3	7	10	14	62
$\mu_0^{(2)}$	8	17	23	36	157
$\mu_0^{(3)}$	13	28	38	58	256

$$T_{\mu_0} = T_{\mu_0}^+ \quad (2)$$

表中 μ_0 有三种选择: $\{\mu_0^{(j)} = x^{(j)} \odot v, 20)\}_{j=1}^3$,
 $\{x^{(j)}\}_{j=1}^3$ 分别取为 44, 44.344, 44.34397483,
 $v^{(1)} = \frac{1}{80}(13 + \sqrt{2409}) \approx 0.77602$. $v^{(2)} = 1$

产品(产业)等级(排序). 山东模型

$P =$

$$\begin{bmatrix} .16361 & .461601 & 3.41348 \cdot 10^{-6} & .00394584 & .363128 & .00771248 \\ .0751298 & .815676 & .00292973 & .0212989 & .0620879 & .0228774 \\ 0 & .897299 & .000497625 & .0401886 & .0293662 & .0326491 \\ .00318995 & .690124 & .0390138 & .126384 & .0572215 & .0840666 \\ .0148452 & .506708 & .0844566 & .0965327 & .0753257 & .222132 \\ .00623491 & .615862 & .132611 & .0709605 & .0338554 & .140476 \end{bmatrix}$$

$$\mu = (4.2271, 45.7599, 1, 1.95712, 4.98704, 2.77413),$$

$$u = (9.39469, 47.5425, 1, 3.29471, 7.7896, 5.27587).$$

等级 \ 产品号	1	2	3	4	5	6
u/μ						
u	②	①	⑥	⑤	③	④
μ	③	①	⑥	⑤	②	④

产品(产业)等级(排序). 山东模型

下面是关于 μ_0 的三种不同取法 $\{\mu_0^{(j)}\}_{j=1}^3$:

μ 的整数部分, 小数点后 3 位, μ 的全 6 位表示和不同的 α , T_{μ_0} 的计算结果.

$T_{\mu_0} \backslash \alpha$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$
μ_0				
$\mu_0^{(1)}$	3 (6)	4 (6)	5 (6)	21 (6)
$\mu_0^{(2)}$	10 (4)	14 (5) (4)	20 (4)	81 (4)
$\mu_0^{(3)}$	13 (6)	17 (6)	25 (6)	104 (6)

不同点 u : (3) (4) (5) $T_{\mu_0} = T_{\mu_0}^+$ μ : (4) (5) (6).

可见用 P 比用 A 的排序好. u 的 (3) 是 μ 的 (2)

3. 预测与调整及经济结构的优化.

推论 (预测与调整 (陈 2022))

设增长速度为 $\delta \in (0, \min\{\rho(A)^{-1} - 1, 1\})$, 令 $\alpha = (1 - \rho(A))^{-1}[(1 + \delta)^{-1} - \rho(A)]$ 及 x_n 为递推方程 $x_n = x_{n+1}[(1 - \alpha)A + \alpha I]$ 的解, 其中 x_0 为预定初值. 则第 $n + 1$ 年的可用消费量为

$$\xi_n = \frac{1 - (1 + \delta)\rho(A)}{\delta}(x_{n+1} - x_n).$$

反之, 由第 $n + 1$ 年的消费不超过 ξ_n 可确定最大增长速度 δ .

例：山东模型. 5.5% : 29.7%; 12% : 24%

δ_i : 5.5% 7% 8% 9% 10% 12%.

γ_i : 5.69 4.33 3.71 3.23 2.84 2.26 > 1

第一年产综 $x_{1,i}$ 与可用消费量 $\xi_{1,i} (\sim \xi_{0,i})$

$x_{1,1}$	$\xi_{1,1}$	$x_{1,2}$	$\xi_{1,2}$	$x_{1,3}$	$\xi_{1,3}$
0.200285	0.059439	0.203132	0.057585	0.205031	0.056349
1.013555	0.300797	1.027966	0.291415	1.037573	0.285159
0.021319	0.006327	0.021622	0.006130	0.021824	0.005998
0.070240	0.020845	0.071238	0.020195	0.071904	0.019762
0.166066	0.049284	0.168427	0.047747	0.170001	0.046722
0.112476	0.033380	0.114075	0.032339	0.115141	0.031645
$x_{1,4}$	$\xi_{1,4}$	$x_{1,5}$	$\xi_{1,5}$	$x_{1,6}$	$\xi_{1,6}$
0.206929	0.055113	0.208827	0.053877	0.212624	0.051405
1.047180	0.278904	1.056788	0.272649	1.076002	0.260139
0.022026	0.005866	0.022228	0.005735	0.022632	0.005472
0.072570	0.019328	0.073236	0.018895	0.074567	0.018028
0.171575	0.045697	0.173149	0.044672	0.176297	0.042622
0.116207	0.030950	0.117273	0.030256	0.119406	0.028868

关键变换(中级): 经济结构的优化

问题: 立足于当前 A , 构造以 $\tilde{u}$ 为目标产综的 $\tilde{A}$.

为应用关键变换, 先把左 $\tilde{u}$ 改为右 $\tilde{v}$. 得出两个

转移概率 然后取 $\tilde{P}_{\tilde{v}} = P$

$$\tilde{P}_{\tilde{v}} := D_{\tilde{v}^{-1}} \frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} D_{\tilde{v}}, \quad P := D_{v^{-1}} \frac{A}{\rho(A)} D_v.$$

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} &= D_{\tilde{v}} P D_{\tilde{v}^{-1}} = D_{\tilde{v}} D_{v^{-1}} \frac{A}{\rho(A)} D_v D_{\tilde{v}^{-1}} \\ &= D_{\tilde{v} \odot v^{-1}} \frac{A}{\rho(A)} D_{v \odot \tilde{v}^{-1}} = D_{\tilde{v} \odot v^{-1}} \frac{A}{\rho(A)} D_{\tilde{v} \odot v^{-1}}^{-1}. \end{aligned}$$

关键变换(中级): 经济结构的优化

$$\frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} = D_{\tilde{v} \odot v^{-1}} \frac{A}{\rho(A)} D_{\tilde{v} \odot v^{-1}}^{-1}.$$

应用于 A^* . 此时, A 的左特征对 $(\rho(A), u)$ 成为 A^* 的右特征对 $(\rho(A), u^*)$, 这一变换将前面的 $\tilde{v}$ 换成我们的目标 $\tilde{u}$. 由上式得到

$$\frac{\tilde{A}^*}{\rho(\tilde{A})} = D_{\tilde{u} \odot u^{-1}} \frac{A^*}{\rho(A)} D_{\tilde{u} \odot u^{-1}}^{-1}.$$

两边取共轭, 得出

$$\frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} = D_{\tilde{u} \odot u^{-1}}^{-1} \frac{A}{\rho(A)} D_{\tilde{u} \odot u^{-1}}.$$

关键变换(中级): 经济结构的优化

定理 (优化矩阵)

具有最大左特征对 $(\rho(A_\alpha), u)$ 的投入产出结构矩阵 A_α 关于目标产综 $\tilde{u}$ 的优化矩阵 $\tilde{A}_\alpha$ 可选为

$$\frac{\tilde{A}_\alpha}{\rho(\tilde{A}_\alpha)} = D_{w^{-1}} \frac{A_\alpha}{\rho(A_\alpha)} D_w, \quad \alpha < 1,$$

其中 $w = \tilde{u} \odot u^{-1}$.

下面我们证明, 这样得到的 $\tilde{A}_\alpha$ 与 A_α 有完全一样的稳定性, 即使对于一般的正的 w .

关键变换(高级): 一般情形

转换定理/等效原理.

固定 $\alpha < 1$

任意给定正向量 w , 定义 $\tilde{A}_\alpha$ 如上. 那么关于 $\tilde{A}_\alpha$ 的迭代解 $\{\tilde{x}_n\}_{n \geq 0}$: $\tilde{x}_0 = \tilde{x}_n \tilde{A}_\alpha^n$ 与关于 A_α 的迭代解 $\{x_n\}_{n \geq 0}$: $x_0 = x_n A_\alpha^n$ 可通过恒等式

$$\rho(\tilde{A}_\alpha)^n \tilde{x}_n = \rho(A_\alpha)^n x_n \odot w, \quad n \geq 0.$$

相互转换. 特别地, 对于每一个 n 和 k , $\tilde{x}_n$ 的第 k 个分量为非正(相应地, 负)当且仅当 x_n 如此.

相同稳定性: 失衡/崩溃的时间和产品都相同.

证明 略去下标 α 不写. 设 $\{x_n\}_{n \geq 0}$ 满足 $x_0 = x_n A^n, n \geq 0$. 则

$$\begin{aligned}
 x_0 D_w &= x_n A^n D_w \quad \boxed{\text{目标是求 } \{\tilde{x}_n\} \text{ 满足 } \tilde{x}_0 = \tilde{x}_n \tilde{A}^n} \\
 &= \left(\rho(A)^n x_n D_w \right) D_{w^{-1}} \left(\frac{A}{\rho(A)} \right)^n D_w \\
 &= \left(\rho(A)^n x_n D_w \right) \left(\frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} \right)^n \\
 &= \left[\left(\frac{\rho(A)}{\rho(\tilde{A})} \right)^n x_n D_w \right] \tilde{A}^n \\
 &= \left[\left(\frac{\rho(A)}{\rho(\tilde{A})} \right)^n x_n \odot w \right] \tilde{A}^n \quad n \geq 0.
 \end{aligned}$$

由于

$$x_0 D_w = \left(\frac{\rho(A)}{\rho(\tilde{A})} \right)^0 x_0 \odot w,$$

这表明

$$\tilde{x}_n := \left(\frac{\rho(A)}{\rho(\tilde{A})} \right)^n x_n \odot w, \quad n \geq 0$$

是迭代方程 $\tilde{x}_0 = \tilde{x}_n \tilde{A}^n$ 的解. 得出等价表示:

$$\rho(\tilde{A})^n \tilde{x}_n = \rho(A)^n x_n \odot w, \quad n \geq 0.$$

最后, 因为 $\rho(A)$, $\rho(\tilde{A})$ 和 w 均为正, 定理末项断言显然. 反向思维 $A \rightarrow A_\alpha, \alpha \in (0, 1)$ 也对 □

小结: 6 次使用转移概率矩阵 P

崩溃定理证明, 稳定性测试, 特征向量计算,
等级排序, 矩阵重排序, 结构优化. 艰难探索.

华理论 $\rightarrow$ 马氏链 [崩溃速度, 随机矩阵.]
旧法得不到 P ! 这里的大部分更新失效!

小结: 6 次使用转移概率矩阵 P

崩溃定理证明, 稳定性测试, 特征向量计算,
等级排序, 矩阵重排序, 结构优化. 艰难探索.

华理论 $\rightarrow$ 马氏链 [崩溃速度, 随机矩阵.]
旧法得不到 P ! 这里的大部分更新实效!

<http://math0.bnu.edu.cn/~chenmf>

The end!

谢谢大家!

41