



北京师范大学

数学科学学院

Beijing Normal University • School of Mathematical Sciences

华罗庚投入产出模型的问题与思考

毛永华

北京师范大学数学科学学院

2022.09.24

@

江苏师范大学

- 1 基本模型: 从定性到定量
- 2 (连续时间) 发展方程
- 3 有消费的模型
- 4 随机化问题
- 5 整体与局部的关系
- 6 价格对价值的扭曲问题

投入产出模型

- 前期的投入 (初始产综)

$$x_0 = (x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \dots, x_0^{(d)}).$$

- 当前的产出情况,

$$x_1 = (x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(d)}).$$

- 效率方阵 $A = (a_{ij})$, 它表示每生产一个单位的第 i 类产品需消耗 a_{ij} 个单位的第 j 类产品. 那么, 为产出 $x_1^{(i)}$ 个单位的第 i 类产品, 需消耗 $x_1^{(i)} a_{ij}$ 个单位的第 j 类产品. 这样, 当前的产出 x_1 , 共消耗了 $\sum_{i=1}^d x_1^{(i)} a_{ij}$ 个单位的第 j 类产品. 此即是 $x_0^{(j)} = \sum_{i=1}^d x_1^{(i)} a_{ij}$.
- 写成向量形式:

$$x_0 = x_1 A = x_2 A^2 = \dots = x_n A^n.$$

- 设 A 非负不可约, 以 u 表其最大特征根 $\rho = \rho(A)$ 所对应的左特征向量 (必定可取为正的).
 - 如取 $x_0 = u$ (不计正常数因子), 则 $x_n = x_0 \rho^{-n}$, $n \geq 1$. 此时平稳增长速度 ρ^{-1} .
 - 若再设 A^{-1} 不是非负的而且 $0 < x_0 \neq u$, 则必定存在 n_0 和 j_0 使得 $x_{n_0}^{(j_0)} \leq 0$. 此时称经济走向崩溃.
- “崩溃”是指发展到某个时期, x_n 必含负分量, 即**崩溃时间**

$$T := \inf\{n \geq 1, \text{ 存在 } j \text{ 使 } x_n^{(j)} < 0\}$$

有限.

- **定量问题: 给出 T 的估计?**

对偶的 Markov 链

- 使用 Perron-Frobenius 定理, 存在 $\rho, u, v > 0$ 使得

$$uA = \rho u, \quad Av = \rho v.$$

陈老师构造 (价值型) Markov 链:

$$p_{ij} = \frac{a_{ij}v_j}{\rho v_i},$$

其平稳分布为 $\pi_i = u_i v_i / \sum_i u_i v_i$.

- 事实上, 我们可以构造 (产品型) Markov 链:

$$\hat{p}_{ij} = \frac{u_j a_{ji}}{\rho u_i},$$

- 上述两个 Markov 链关于它们的共同的平稳分布 π 是对偶 (时间反转的)

定量分析: 强遍历

- 崩溃时间等价描述: 令 $\mu_0 = \mu_n P^n$, 则

$$T = \inf \left\{ n : \exists n, i \text{ 使得 } \mu_n^{(i)} < 0 \right\}.$$

- 使用全变差范数 $\|\cdot\|_{\text{Var}}$, 我们有

$$T = \inf \{ n : \exists n \text{ 使得 } \|\mu_n\|_{\text{Var}} > 1 \}.$$

- 由强遍历: $\|P^n - \pi\|_{\text{Var}} \rightarrow 0$ 有

$$\begin{aligned} \mu_0 - \pi &= \mu_n (P^n - \pi) \Rightarrow \|\mu_0 - \pi\|_{\text{Var}} \leq \|\mu_n\|_{\text{Var}} \|P^n - \pi\|_{\text{Var}} \\ &\Rightarrow \|\mu_n\|_{\text{Var}} \geq \|\mu_0 - \pi\|_{\text{Var}} / \|P^n - \pi\|_{\text{Var}}. \end{aligned}$$

- 还可以用 $\mu_0 - \pi = (\mu_n - \pi)(P^n - \pi)$ 得到 μ_n 离 π 多远.
- 对偶 Markov 也可以做到: $f_0 = \hat{P}^n f_n$.

- 崩溃时间精准估计问题: 上界估计:

$$T \leq 1 + \log (\|\mu_0 - \pi\|_{\text{Var}}/C)/\log \lambda.$$

需要下界估计?

- 目标与控制: 令

$$D = \left\{ (x^{(1)}, \dots, x^{(d)}) \geq 0 : \sum_i x^{(i)} = 1 \right\},$$

这是一凸集合. 则全变差范数 $\|\cdot\|_{\text{Var}}$ 即 D 上的 Minkowski 泛函:

$$\|\mu\|_{\text{Var}} = \inf \{ \lambda > 0 : \mu/\lambda \in D \}.$$

- 根据需要进行选择 (凸) 区域 D 而得到 Minkowski 泛函.

- 考虑连续时间的投入产出模型:

$$x_0 = x_t A(t), t \geq 0,$$

- 其中矩阵 $A(t)$ 满足发展方程:

$$A(t+s) = A(t)A(s), \quad A(0) = I.$$

由 Kolmogorov 理论得到: $A(t)$ 存在唯一, 且存在 Stieltjes (Z) 矩阵 $B = (b_{ij})$:

$$b_{ij} \geq 0, \quad i \neq j; \quad (b_{ii} \leq 0,)$$

满足

$$A'(0) = B, \quad A'(t) = BA(t) = A(t)B, \quad t \geq 0.$$

跳过程

- 如同离散时间, 此时可以有一个连续时间 Markov 链—跳过程.
- 由 B 满足 PF 定理, 有 $\lambda \in \mathbb{R}$, $u, v > 0$ 使得 $uB = \lambda u$, $Bv = \lambda v$, 可定义

$$q_{ij} = \frac{b_{ij}v_j}{v_i} - \lambda\delta_{ij}.$$

- 为使 $Q = (q_{ij})$ 成为 Q 矩阵, 必须 $q_{ii} = b_{ii} - \lambda < 0$ 或 $\lambda > b_{ii}, \forall i$
- 上述 Q 是保守, 不可约的 (来自 B 不可约), 具有平稳分布 $\pi_i = u_i v_i$, 即

$$\sum_i \pi_i q_{ij} = \sum_i u_i v_i b_{ij} v_j / v_i - \lambda u_j v_j = 0.$$

- Q 过程 $P(t)$ 存在唯一, 而且遍历:

$$p_{ij}(t) = \frac{a_{ij}(t)v_j}{v_i} e^{-\lambda t}$$

- 前述 A 为某 $A(h)(h > 0)$, 即连续时间的骨架过程.
- 同样定义崩溃时间: 考虑连续时间模型 $x_0 = x_t A(t), t \geq 0$

$$T_c = \inf \left\{ t : \exists i, x_t^{(i)} < 0 \right\}.$$

显然 $T_c \leq T \leq T_c + h$.

- 使用**跳过程的强遍历** 做定量分析.

模型甲：按比例消费

- 若 X_0 为初始投入, 由

$$y_0 = x_0 = x_1 A$$

得到第一年产出 x_1 , 以增量 $x_1 - x_0$ 的倍数 $\alpha \in [0, 1]$, 则第一年的再投入为

$$y_1 = x_1 - \alpha(x_1 - x_0) = y_0[(1 - \alpha)A^{-1} + \alpha I] =: y_0 B_\alpha.$$

年复一年, 则有

$$y_n = y_0 B_\alpha^n, \quad n \geq 1.$$

- (华罗庚) 设 $1 \geq \alpha \geq \beta \geq 0$, 则 $\forall y > 0$ 有

$$y B_\beta \geq 0 \Rightarrow y B_\alpha \geq 0.$$

从而崩溃时间 $T_\alpha \geq T_\beta$.

- 若 $\rho < 1$, 则均衡增长速度 $(1 - \alpha)\rho^{-1} + \alpha \leq (1 - \beta)\rho_{-1} + \beta$.
- 保增长和保稳定的平衡点在哪?

“迷向”消费

- 前面的消费形式改为:

$$(x_1 - x_0)\Theta,$$

其中 $\Theta = \text{diag}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d), \theta_i \in [0, 1]$.

- 此时模型变为:

$$y_n = y_0 B_{\Theta}^n, \quad n \geq 1,$$

其中 $B_{\Theta} = A^{-1}(I - \Theta) + \Theta$.

- 需要一个崩溃定理 (OK) 及其定量估计 (?)

- 按比例情况:

$$x_n = x_{n+1}[(A + \alpha I)/(1 + \alpha)] =: x_{n+1}A_\alpha, \quad n \geq 0.$$

- 其对应 Markov 链为

$$p_{ij}^{(\alpha)} = \frac{1}{\rho + \alpha}[\rho p_{ij} + \alpha \delta_{ij}], \quad \text{或} \quad P^{(\alpha)} = \frac{1}{\rho + \alpha}[\rho P + \alpha I].$$

- 较之 P , $P^{(\alpha)}$ 更“lazy(惰性)”, 从而更稳定 (晚崩溃).

随机化模型的崩溃定理

- 设非负随机矩阵序列 $\{A_n, n \geq 1\}$ 独立同分布.
- 随机投入产出模型

$$x_0 = x_1 A_1 = x_2 A_2 A_1 = \cdots = x_n A_n A_{n-1} \cdots A_1 =: x_n M_n.$$

- 答案还是

$$T = \inf \left\{ n : \exists 1 \leq j \leq d, \quad x_n^{(j)} < 0 \right\}$$

a.s. 有限.

- 定量分析
- 大偏差问题

全要素 (total factor) 生产模型

- 全要素生产, 也就是产品类别充分大, 此时在数学上即处理为“无穷”. 使用无穷维结构矩阵 $A = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$,
- 如何从实际生活中知道 A 具有 Perron-Frobenius 定理?
- 局部化结构矩阵 $\tilde{A} = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq d}$:

$$\rho(\tilde{A}) < \rho(A).$$

即局部看增长速度 $\rho(\tilde{A})^{-1}$ 大于整体地增长速度 $\rho(A)^{-1}$.

- 左右 PF 特征值 $\tilde{u}, \tilde{v}$ 与 u, v 关系?

可数状态空间 Markov 链

- 对于全要素结构矩阵 A , 若存在正的左或右特征矢量 u, v

$$uA = \rho u, \quad Av = \rho v.$$

同样得到 Markov 链:

$$p_{ij} = \frac{a_{ij}v_j}{\rho v_j}, \quad \forall i, j$$

或者

$$\hat{p}_{ij} = \frac{u_j a_{ji}}{\rho u_i}.$$

- 此 Markov 链正常返当且仅当 $uv = \sum_i u_i v_i < \infty$
- A 如何能够使 P 或 $\hat{P}$ 强遍历?

Censored Markov 链: 行业化

- 将状态空间划分 $E = \sum_s E_s$, censored Markov 或在 $\{E_s\}$ 的迹过程:

$$T_{rs} = \frac{1}{\pi(E_r)} \sum_{i \in E_r, j \in E_s} \pi_i p_{ij}, \quad \forall r, s.$$

- T 具有平稳分布 $\{\pi(E_1), \pi(E_2), \dots\}$.
- 以此回到全要素结构矩阵 A , 即得到“行业化”.
- 另外可使用若干代表性的产品来分析, 即“指标化”.
- 华先生的 **工农业模型**

价格与价值

- 依据华先生, 结构矩阵 A 的右特征矢量 v 是产品的价值 (或可称为结构价值). 而市场经济中, 每个产品 (商品) 都有一个交易价值, 即价格 $p = (p_1, p_2, \dots, p_d)^T$
- 记 $\gamma_i = v_i/p_i, 1 \leq i \leq d$. 定义非负矩阵 $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$:

$$m_{ij} = \frac{a_{ij}\gamma_j}{\gamma_i} = \frac{a_{ij}v_j/p_j}{v_i/p_i}, \quad 1 \leq i, j \leq d.$$

其量纲为以市场价格所计之产品数量.

- 再令 $q_i = u_i v_i / p_i, q = (q_1, q_2, \dots, q_d)$, 则 $\rho(M) = \rho(A) =: \rho$, 且

$$Mp = \rho(A)p, \quad qM = \rho(A)q.$$

- 仍然构造其对应之 Markov 链:

$$p_{ij} = \frac{m_{ij}p_j}{\rho p_i} = \frac{a_{ij}v_j/p_j}{\rho v_i/p_i} \frac{p_j}{p_i} = \frac{a_{ij}v_j}{\rho v_i}.$$

- 可以看到计划经济和市场经济下的投入产出模型背后的 Markov 链是同一个.
- 那么在经济上, 我们继续关心什么? 崩溃之前的资本收益, 是产业资本还是金融资本?

谢谢!