

# 华氏经济优化理论的新发展 I

陈木法

(江苏师范大学 北京师范大学)

华罗庚经济最优化理论的新探索

2022 年 9 月 24 日

# 概要

- 华罗庚经济优化模型的修正与更新;
- 产品(产业)等级(排序)与稳定性分析;
- 预测与调整及经济结构的优化.

## 两文

- 陈 (2022): **关键变换** 华罗庚经济最优化理论的新进展. 应用概率统计 38(2): 159-178.
- 陈彬, 陈, 谢颖超, 杨婷, 周勤 (2022): 经济系统的产品排序与结构优化. 应用概率统计 38(4): 475-504.

# 1 投入产出模型

所关心的产品所构成的**产综** [固定单位: 吨, ...]:

$$x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d)}).$$

考察当前经济的三种数据

- 去年的投入:  $x_0 = (x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \dots, x_0^{(d)})$
- 今年的产出:  $x_1 = (x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(d)})$
- 结构方阵 (消耗系数方阵):  $A = (a_{ij})$  (假定时齐). 每生产一个单位的  $i$  类产品, 需消耗  $a_{ij}$  个单位的  $j$  类产品.  $x_0 = x_1 A$

投入产出法

$$x_{n-1} = x_n A, \quad x_0 = x_n A^n; \quad x_n = x_0 A^{-n}, \quad n \geq 1.$$

# 非负、不可约矩阵的三大特征

$A = (a_{ij})$ . 边:  $i \rightarrow j, a_{ij} > 0$ . 连通图=不可约.

## 定理 (Perron-Frobenius 1907, 1912)

每一非负、不可约矩阵都有**三大特征**:

- **最大特征值**  $\rho(A)$  是正的单重特征值.
- **最大左特征向量**  $u$  (行向量)为正.
- **最大右特征向量**  $v$  (列向量)为正.

左、右正特征向量  $u$  (行)与  $v$  (列):  $\rho = \rho(A)$

$$uA = \rho u, \quad Av = \rho v.$$

$\forall \lambda: |\lambda| \leq \rho(A)$ , 若  $A$  含一个正对角元素, 则仅有  $<$ .

# 华罗庚基本定理. 左正特征向量法

无消费情形:  $\rho(A) = \lambda_{\max}(A)$ , 左  $u$ 、右  $v$

- 最好的投入  $x_0 =$  最大左特征向量  $u$ .

此时有最佳发展速度  $1/\rho(A)$ . 优化 1:  $x_0 = u$

- 否则, 必然走向失衡或崩溃, 即

失衡时  $T_{x_0} = \inf\{n: x_n \text{ 的某个分量} \leq 0\} < \infty$ .

崩溃时  $T_{x_0}^+ = \inf\{n: x_n \text{ 的某个分量} < 0\} < \infty$ .

前所未有的贡献是优化 2:  $T_{x_0}^+ = \infty \implies x_0 = u$ .

先前平衡解源于不动点定理, 华理论可计算

# 华氏基本定理. 华的更新. 应数 II, 王元

**带消费**实用模型[1985/87 书]. **消费比例**  $\gamma \in (0, 1)$ .

$$x_0 = x_n A_\gamma^n, \quad n \geq 1,$$

华文集 9 卷, 2010. 陈 §7 (2)

$$A_\gamma = \frac{A + \gamma I}{1 + \gamma}.$$

**更新:** 回到非负阵

$$\rho(A_\gamma) = \frac{\rho(A) + \gamma}{1 + \gamma}$$

$$\rho = 0.6, \quad \frac{0.4}{1.6} = \frac{1}{4}$$

$\rho := \rho(A) < 1$  (假设). **经济增长速度:**

$$\gamma \uparrow \infty?$$

$$\frac{1}{\rho(A_\gamma)} - 1 = \frac{1 - \rho}{\gamma + \rho} \downarrow \frac{1 - \rho}{1 + \rho} > 0, \quad \gamma \uparrow 1$$

# 华氏基本定理. 修正与再更新

带消费实用模型[新]. 消费倍数  $\gamma := \frac{\alpha}{1-\alpha}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ .

$$x_0 = x_n A_{\alpha}^n, \quad n \geq 1,$$

$A_{\alpha} = (1 - \alpha)A + \alpha I$ . 回到非负阵.  $A_0 := A$ .

[无消费算子  $A$  与无增长算子  $I$  的凸组合]

$\rho(A_{\alpha}) = (1 - \alpha)\rho(A) + \alpha$ .  $A_{\alpha} (\alpha < 1)$  同  $u, v$

倍数:  $\gamma = \frac{\alpha}{1 - \alpha}$ . 增长很小时需倍数很大[平衡].

| 旧算子                             | 新算子                        |
|---------------------------------|----------------------------|
| $(1 - \alpha)A^{-1} + \alpha I$ | $(1 - \alpha)A + \alpha I$ |
| 实矩阵, 整个谱                        | 非负矩阵, 最大特征对                |

# 关键变换(高级: 任意正的 $w$ )

$D_w$  : 以向量  $w = (w^{(k)} : k \in E)$  作为对角线元素的对角矩阵.

$$\frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} = D_w^{-1} \frac{A}{\rho(A)} D_w, \quad w > 0.$$

$$\Rightarrow \left( \frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} \right)^n = D_w^{-1} \left( \frac{A}{\rho(A)} \right)^n D_w, \quad n \geq 1.$$

$$A \rightarrow A_\alpha, \quad \alpha < 1.$$

$$A_w = D_w^{-1} \frac{A}{\rho(A)} D_w, \quad w > 0.$$

## 定理 (陈 1989/1992)

- $A_w$  成为转移概率  $P$  当且仅当  $w = v$ .
- $P$  的左特征向量为  $\mu := u \odot v$ , 归一化为  $\pi := u \odot v / (uv)$ . 平稳分布  $\pi = \pi P = \pi P^n$ .

证明 无妨设  $\rho(A) = 1$ . 那么 1: 分量恒为 1 的列向量

$$A_w \mathbb{1} = D_w^{-1} A D_w \mathbb{1} = D_w^{-1} A w \stackrel{?}{=} \mathbb{1}$$

第一项断言成立当且仅当  $A w = D_w \mathbb{1} = w$ .

# 关键变换(初级)

第二项断言:  $u \odot vP = u \odot v$

$$\begin{aligned} u \odot vP &= u \odot vD_{v^{-1}}AD_v = u \odot v \odot v^{-1}AD_v \\ &= uAD_v = uD_v = u \odot v. \quad \square \end{aligned}$$

30 年前引进  $P$  是为理解“崩溃”这个神奇要点:  
马氏链平稳分布存在唯一:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \mathbb{1}\pi \text{ (每行均为 } \pi \text{ 的方阵),}$$

先逐点, 然后一致(因矩阵有限).

$$A_\alpha = (1 - \alpha)A + \alpha I \rightarrow P_\alpha$$

$$\rho(A_\alpha) = (1 - \alpha)\rho(A) + \alpha,$$

$$\begin{aligned} P_\alpha &= D_{v^{-1}} \frac{A_\alpha}{\rho(A_\alpha)} D_v \quad (A_\alpha \text{ 与 } A \text{ 有相同的 } v) \\ &= \rho(A_\alpha)^{-1} [(1 - \alpha) D_{v^{-1}} A D_v + \alpha I] \\ &= \rho(A_\alpha)^{-1} \left[ (1 - \alpha) \rho(A) D_{v^{-1}} \frac{A}{\rho(A)} D_v + \alpha I \right] \\ &= (1 - \beta_\alpha) P + \beta_\alpha I, \quad \beta_\alpha := \alpha / \rho(A_\alpha). \end{aligned}$$

## 引理 (陈 2022)

相应于  $A_\alpha$ , 我们有  $P_\alpha$  如上. 进而  $P_\alpha$  ( $\alpha < 1$ ) 有相同的左、右特征向量  $u \odot v$  与  $\mathbb{1}$ .

## 2. 产品(产业)等级(排序)与稳定性分析

概括地讲, 使用  $P$  的两大优点:

- $\mu$  综合了  $A$  的三大特征, 而  $u$  仅用其中两个.
- 使用  $P$  或  $A$  的稳定性完全重合, 但前者的振幅远小于后者.

应用于特征向量的计算.

---

将  $\mu$  的分量从大到小重新排序, 导出指标  $(1, \dots, d)$  的一个重排  $\tau$ . 进而得到新的  $\tilde{P}$ . 两者有相同的稳定性. 用于大稀疏阵特征对计算

C. & R.R. Chen. Top Eigenpairs of Large Scale Matrices. CSIAM Trans. Appl. Math. 2022, 3(1).

# 稳定性分析. 华取自 W. Leontief, 1965

$$A = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 25 & 14 \\ 40 & 12 \end{bmatrix}, \quad \text{农业、制造业}$$

$$\rho(A) = \frac{1}{200} (37 + \sqrt{2409}) \approx 0.430408,$$

$$u = \left( \frac{5}{7} (13 + \sqrt{2409}), 20 \right), \quad \text{左}$$

$$v = \left( \frac{1}{80} (13 + \sqrt{2409}), 1 \right)^*. \quad \text{右}$$

$$P = \frac{1}{\rho(A)} D_{v^{-1}} A D_v.$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{5}{104}(-37 + \sqrt{2409}) & \frac{1}{104}(289 - 5\sqrt{2409}) \\ \frac{1}{130}(241 - 3\sqrt{2409}) & \frac{3}{130}(-37 + \sqrt{2409}) \end{bmatrix}.$$

$$u \times 20 \approx (44.34397483, 20).$$

$$\begin{aligned} \mu \times 20 &= \left( \frac{1289 + 13\sqrt{2409}}{56}, 20 \right) \\ &\approx (34.41179182, 20). \end{aligned}$$

$$u \odot v \times 20 \approx (34.41179182, 20).$$

# $x_n = x_0 A^{-n}$ 与 $\mu_n = \mu_0 P^{-n}$ 的比较.

$x_0 = (44.344, 20)$ .  $T_{x_0} = 8$ .  $1/\rho(A) \approx 2.3$

相同的稳定性

| $n$   | 1                  | 2                   | 3                  |
|-------|--------------------|---------------------|--------------------|
| $x_n$ | (103.028, 46.4677) | (239.375, 107.96)   | (556.111, 250.868) |
| $n$   | 4                  | 5                   | 6                  |
| $x_n$ | (1292.85, 582.247) | (2990.66, 1362.96)  | (7165.52, 2998.2)  |
| $n$   | 7                  | 8                   |                    |
| $x_n$ | (13054.5, 9754.73) | (89821.2, -23501.9) | (2)                |

$\mu_0 = (34.4118, 20)$ .  $T_{\mu_0} = 8$ .  $\rho(P) = 1$  相同的崩溃时间和产品

| $n$     | 1                  | 2                   | 3                  |
|---------|--------------------|---------------------|--------------------|
| $\mu_n$ | (34.4118, 20.0001) | (34.4122, 19.9996)  | (34.4092, 20.0026) |
| $n$     | 4                  | 5                   | 6                  |
| $\mu_n$ | (34.4303, 19.9815) | (34.28, 20.1318)    | (35.351, 19.0608)  |
| $n$     | 7                  | 8                   |                    |
| $\mu_n$ | (27.7201, 26.6917) | (82.0905, -27.6787) | (2)                |

差别  $\frac{89821.2}{82.0905} = 1094$ . 只是  $2 \times 2$  方阵.

# L-华模型稳定性. 使用 $P_\alpha: \mu_n = \mu_0 P_\alpha^{-n}$

| $T_{\mu_0} \backslash \alpha$ | $\alpha$ | 0  | 2             | 3             | 1             | 5             |
|-------------------------------|----------|----|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $\mu_0$                       |          | 0  | $\frac{2}{7}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{6}$ |
| $\mu_0^{(1)}$                 |          | 3  | 7             | 10            | 14            | 62            |
| $\mu_0^{(2)}$                 |          | 8  | 17            | 23            | 36            | 157           |
| $\mu_0^{(3)}$                 |          | 13 | 28            | 38            | 58            | 256           |

$$T_{\mu_0} = T_{\mu_0}^+ \quad (2)$$

表中  $\mu_0$  有三种选择:  $\{\mu_0^{(j)} = (x_0^{(j)} v^{(1)}, 20)\}_{j=1}^3$ ,  
 其中  $x_0^{(j)}$  分别取为 44, 44.344, 44.34397483,  
 $v^{(1)} = \frac{1}{80}(13 + \sqrt{2409}) \approx 0.77602$ .  $v^{(2)} = 1$

### 3. 预测与调整及经济结构的优化.

#### 推论 (预测与调整 (陈 2022))

设增长速度为  $\delta \in (0, \min\{\rho(A)^{-1} - 1, 1\})$ , 令  $\alpha = (1 - \rho(A))^{-1}[(1 + \delta)^{-1} - \rho(A)]$  及  $x_n$  为递推方程  $x_n = x_{n+1}[(1 - \alpha)A + \alpha I]$  的解, 其中  $x_0$  为预定初值. 则第  $n + 1$  年的可用消费量为

$$\xi_n = \frac{1 - (1 + \delta)\rho(A)}{\delta}(x_{n+1} - x_n).$$

反之, 由第  $n + 1$  年的消费不超过  $\xi_n$  可确定最大增长速度  $\delta$ .

# 关键变换(中级): 经济结构的优化

问题: 立足于当前  $A$ , 构造以  $\tilde{u}$  为目标产综的  $\tilde{A}$ .

为应用关键变换, 先把左  $\tilde{u}$  改为右  $\tilde{v}$ . 得出两个

转移概率 然后取  $\tilde{P}_{\tilde{v}} = P$

$$\tilde{P}_{\tilde{v}} := D_{\tilde{v}^{-1}} \frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} D_{\tilde{v}}, \quad P := D_{v^{-1}} \frac{A}{\rho(A)} D_v.$$

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} &= D_{\tilde{v}} P D_{\tilde{v}^{-1}} = D_{\tilde{v}} D_{v^{-1}} \frac{A}{\rho(A)} D_v D_{\tilde{v}^{-1}} \\ &= D_{\tilde{v} \odot v^{-1}} \frac{A}{\rho(A)} D_{v \odot \tilde{v}^{-1}} = D_{\tilde{v} \odot v^{-1}} \frac{A}{\rho(A)} D_{\tilde{v} \odot v^{-1}}^{-1}. \end{aligned}$$

# 关键变换(中级): 经济结构的优化

$$\frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} = D_{\tilde{v} \odot v^{-1}} \frac{A}{\rho(A)} D_{\tilde{v} \odot v^{-1}}^{-1}.$$

应用于  $A^*$ . 此时,  $A$  的左特征对  $(\rho(A), u)$  成为  $A^*$  的右特征对  $(\rho(A), u^*)$ , 这一变换将前面的  $\tilde{v}$  换成我们的目标  $\tilde{u}$ . 由上式得到

$$\frac{\tilde{A}^*}{\rho(\tilde{A})} = D_{\tilde{u} \odot u^{-1}} \frac{A^*}{\rho(A)} D_{\tilde{u} \odot u^{-1}}^{-1}.$$

两边取共轭, 得出

$$\frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} = D_{\tilde{u} \odot u^{-1}}^{-1} \frac{A}{\rho(A)} D_{\tilde{u} \odot u^{-1}}.$$

# 关键变换(中级): 经济结构的优化

## 定理 (优化矩阵)

具有最大左特征对  $(\rho(A), u)$  的投入产出结构矩阵  $A$  关于目标产综  $\tilde{u}$  的优化矩阵  $\tilde{A}$  可选为

$$\frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} = D_{w^{-1}} \frac{A}{\rho(A)} D_w,$$

其中  $w = \tilde{u} \odot u^{-1}$ .

下面我们证明, 这样得到的  $\tilde{A}$  与  $A$  有完全一样的稳定性, 即使对于一般的正的  $w$ .

# 关键变换(高级): 一般情形

## 转换定理/等效原理.

任意给定正向量  $w$ , 定义  $\tilde{A}$  如上. 那么关于  $\tilde{A}$  的迭代解  $\{\tilde{x}_n\}_{n \geq 0}$ :  $\tilde{x}_0 = \tilde{x}_n \tilde{A}^n$  与关于  $A$  的迭代解  $\{x_n\}_{n \geq 0}$ :  $x_0 = x_n A^n$  可通过恒等式

$$\rho(\tilde{A})^n \tilde{x}_n = \rho(A)^n x_n \odot w, \quad n \geq 0.$$

相互转换. 特别地, 对于每一个  $n$  和  $k$ ,  $\tilde{x}_n$  的第  $k$  个分量为非正(相应地, 负)当且仅当  $x_n$  如此.

相同稳定性: 失衡/崩溃的时间和产品都相同.

**证明** 设  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  满足  $x_0 = x_n A^n$ ,  $n \geq 0$ . 则

$$\begin{aligned} x_0 D_w &= x_n A^n D_w \\ &= \left( \rho(A)^n x_n D_w \right) D_w^{-1} \left( \frac{A}{\rho(A)} \right)^n D_w \\ &= \left( \rho(A)^n x_n D_w \right) \left( \frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} \right)^n \\ &= \left[ \left( \frac{\rho(A)}{\rho(\tilde{A})} \right)^n x_n D_w \right] \tilde{A}^n \\ &= \left[ \left( \frac{\rho(A)}{\rho(\tilde{A})} \right)^n x_n \odot w \right] \tilde{A}^n \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

由于

$$x_0 D_w = \left( \frac{\rho(A)}{\rho(\tilde{A})} \right)^0 x_0 \odot w,$$

这表明

$$\tilde{x}_n := \left( \frac{\rho(A)}{\rho(\tilde{A})} \right)^n x_n \odot w, \quad n \geq 0$$

是迭代方程  $\tilde{x}_0 = \tilde{x}_n \tilde{A}^n$  的解. 得出等价表示:

$$\rho(\tilde{A})^n \tilde{x}_n = \rho(A)^n x_n \odot w, \quad n \geq 0.$$

最后, 因为  $\rho(A)$ ,  $\rho(\tilde{A})$  和  $w$  均为正, 定理末项断言显然.

学会反向思维



<http://math0.bnu.edu.cn/~chenmf>

The end!

谢谢大家!

24