综述报告

以随机数学为基地
探索与其他学科交叉的新领域

陈木法

(江苏师大　北京师大)

本文概述近五十多年来如标题所示的探索. 主要摸索到的新领域为下面的前三条. 其中的第四条为相关的探索成果.

- 与统计物理交叉开拓新天地.
- 与其他数学分支的交叉: 各种稳定性及其速度估计的近乎全新理论.
- 与经济的交叉: 经济最优化的首个精密理论.
- 数学研究深层中的优选法.

期盼这些经历对后来者有所帮助.

一、与统计物理交叉开拓新天地.

1972 年我大学毕业后, 被分配到贵阳师院工作. 当时我主要从事推广优选法工作. 很快发现自己的理论素养严重不足, 难于进入理论探索. 于是求助于母校(北师大) 严士健老师. 严先生在身处困境条件下, 跑遍北京市多家旧书店, 给我购买了十多本概率统计方面的名著, 包括 M. Loève 的名著 [13]. 并建议我认真读好此书. 还寄给我他和王隽骧、刘秀芳合著的 [17] 正式出版前的油印本, 多亏有后者的帮助, 让我在两年半时间内顺利读完前者. 在进入专题研究之时, 恰好见到侯振挺老师发表的著名论文 [11]. 1975 年经中科院越民义先生介绍, 侯老师收我为徒, 走上了研究马尔可夫链的道路. 1976 年终于得到机会到长沙当面请教侯老师. 我们一起研续钟开莱的名著 [9], 只是并不在教室里、书桌旁, 而是在山坡上, 以石头为椅子, 逐页研读该书. 1976—78 年间, 很幸运, 北京大学的钱敏教授, 基于他早年的物理背景, 建议研究平衡态统计物理模型, 这相应于可逆马尔可夫过程. 他和钱敏平、龚光鲁一起研究可逆扩散过程;

我和侯老师则研究可逆马氏链. 令本人难以忘怀的是在 1979 年, 当年我还是在读研究生, 钱家三人经与我导师严先生商定, 带着他们邀请的美国华盛顿大学的 M.L. Silverstein 教授到北京师大, 让我向 Silverstein 教授介绍我和侯老师关于可逆马氏链的研究工作. 也是在当年, 我们一起在湖南科技出版社出版了研究专著 [16] (见本人主页). 书中的第六章是我和侯老师的论文“马尔可夫过程与场论”, 简言之, 我们在马氏过程的研究中引入了分析中古典保守场论的数学工具. 这项工作后来得到许多应用, 现在, 我们知道它还可拓广到可厄米矩阵理论, 进入量子力学. 熟知, 古典保守场论的核心是该场沿任何闭路所做的功等于零(等价地, 路径无关性). 当年 (1979), 我们很难见到国外的文献. 只是在三年之后访问美国时才知道: 对于有限马氏链, 我们所找到判准“沿任何闭路所做的功为零”等价于 Kolmogorov (1936) 的“圈形(cycle) 条件”. 其实, 这里并无遗憾, 因当年我们实际上得到远为简便的判准. 因为有了图结构, 不难想象: 我们只需检查最小闭圈便已足够而无需检查一切闭路. 所以实际上常用的仅有三角形或四边形两种最小闭圈. 场论的工具不仅适用于可数状态的马氏链, 也适用于一类无穷维的粒子系统, 即平衡态统计物理模型. 在笔者的专著 [2] 的 §11.1 可找到“三角形条件”和“四边形条件”的应用实例. 1977 年钟开莱回国讲学时提到俄罗斯 R.L. Dobrushin 学派创建了随机数学与平衡态统计物理交叉的新的研究领域, 称之为随机场理论. 这是数学发展史上从公理化运动回归自然的重大事件. 因此, 1978 年本人读研时, 结合我之前的基础, 严先生建议开展此方向研究. 我们花费一学期讨论 C. Preston 的小册子 [15], 并译成中文在国内出版. 这是不含时间的静态系统. 不久见到 T.M. Liggett 的综述论文 [14]. 这是含时间参数的动态系统, 更切合我们的研究背景. 所以我们集中研究作为一类无穷维交互作用粒子系统的平衡态统计物理理论.

也是在 1977 年, 布鲁塞尔学派的领军人伊利亚 • 普里高津(Ilya Prigogine) 荣获诺贝尔化学奖, 这是历史上首次直接表彰非平衡统计物理领域的开创性工作. 这与前一部分的平衡态统计物理可视为两个不同的世界, 难度大得多. 笔者针对其中的典型模型, 特别是 Schlögl 模型, 研究了本人 1985 年所引进的无穷维反应扩散过程 [3] 的构造, 过程的唯一性, 其平稳分布的存在性和遍历性等问题. 在前面本人专著中, 末尾部分(102 页)专门处理非平衡系统, 处理了典型的 15 个模型. 1985 年前后, 继美国的 F. Spizer 访问我们之后, 该校的 R. Durrett 立即要求访华. 当年因

我校经费有困难, 我们安排他访问安徽师大, 国内同行齐聚那里交流. 在他到达当晚, 我给他写了三页纸, 列举当时我们所关注的模型. 九年之后在美国见到他时, 他说他一直保存着那三张纸.

A. Perrut, R. Durrett等 6 人在 4 篇文章中称上述过程的构造为“Chen's construction”, 等等. 加拿大 Fields 研究所前所长 D.A. Dawson 等人对于相应的平均场模型的研究, 直接使用了我的结果和方法. 美国以 R. Durrett 为首的一批学者关于反应扩散过程的各种简化模型的一大批文章, 构成他在法国概率论暑期学校的十次演讲的内容 [10]. 他在演讲的开头就明确指出“for a closely related model of Schlögl (1972) (see Part IV of Chen (1992) for a survey).” 我对其诚信风度深为敬佩和感激. 我们经过五年的摸索, 才选择了 Schlögl 模型等非平衡统计物理的典型模型作为主攻方向[物理背景见 H.Haken (1977–83), Synergetics]，力图探索非平衡统计物理的数学基础. R. Durrett 和 T.M. Liggett, 还有意大利, 德国等的学者也参与了此方向的研究. 从数学上讲, 这些模型非常难. 虽经二十年的努力, 尚有重要问题未解决.

局部地看, 无穷维反应扩散过程成为有限维的跳过程, 因此, 后者乃前者的根基. 例如说过程的唯一性, 单就两维情形也就非平凡, 但这里需用到任意有限维的唯一性, 否则谈不上无穷维. 关于此难题, 笔者经历了五年才找到办法, 然后又经历了三年才完成其一般形式.

当年, 俄罗斯的 R.L. Dobrushin 学派创造了一种概率度量—Wasserstein 距离, 而美国学派常用耦合方法, 多年之后笔者才领悟到两者实质上是姐妹关系. 后来多次使用“耦合与概率距离” 作为演讲的标题. 产生了“马氏耦合、最优马氏耦合、距离关于耦合的优化”这个“耦合三步曲”. 其中的“最优马氏耦合”就是关于某类距离来分类的. 基于前述的跳过程的唯一性判准, 我们得出: 两个边缘过程均唯一当且仅当某一个(等价地, 任意一个)耦合跳过程唯一. 需知对于给定的两个边缘, 它们的耦合过程可能有不可数无穷多. 这一步也是下一步研究“收敛速度估计”的主要工具. 概言之, 作为反应扩散过程研究的基石, 我们加深并扩展了跳过程的一般理论.

由于我们快速地进入国际前沿, 很快引起当年的俄、美两大学派领袖的重视. 俄 R.L. Dobrushin 提议申请了中俄合作研究项目; 美国 R. Durrett 提议的中美合作项目, 详见本人主页“科普作品”[1], 其中包含感人材料.

下面引述关于这项成果海外的两次鼓励(恳请读者对他们的爱护言

词多多包容).

- S. Rachev (Zbl. Math.753 (1993), p. 301): "The author is an outstanding Chinese probabilist in probability and stochastic processes creating the Chinese school of Markov processes".
- T.M. Liggett (美国科学院院士)(Math. Reviews 94a (994), p.439): "the school led by the author in Beijing has worked on the construction and ergodic theory of the class of interacting particle systems known as reaction diffusion processes."

二、与其他数学分支的交叉: 各种稳定性及其速度估计的近乎全新理论.

统计物理的核心课题是相变现象, 研究相变需要无穷维数学, 因为有限维无相变. 这里呈现多彩景观. 令人想起列夫・托尔斯泰名言: "幸福的家庭都是相似的, 不幸的家庭各有各的不幸".

- 对"不幸家庭"的研究方法有: Peierls 方法, Sinai 理论, 反射正性理论, Durrett 等人的共存现象, 等等.
- 对"幸福家庭". 系统应处于稳定(遍历)区域. 我们寻找指数式遍历速度, 等价地, 相应算子的谱隙 (第一非平凡特征值)来刻画. 速度越精确就越接近于相变的分界线. 这属于数学研究中富有共性的领域. 我们选择这一条路, 逐步形成新理论

三种经典遍历性 $\|f\|_{\mathrm{Var}}=\mathrm{Var}(f)=\pi(f^2)-\pi(f)^2$

通常遍历： $\lim_{t\to\infty}\|P_t(x,\cdot)-\pi\|_{\mathrm{Var}}=0,$

指数式遍历： $\exists\alpha>0$ 使得

$$\|P_t(x,\cdot)-\pi\|_{\mathrm{Var}}\leqslant C(x)e^{-\alpha t},$$

强遍历： $\lim_{t\to\infty}\sup_x\|P_t(x,\cdot)-\pi\|_{\mathrm{Var}}=0$

$$\iff \exists\beta>0 \text{ 使得 } \lim_{t\to\infty}e^{\beta t}\sup_x\|P_t(x,\cdot)-\pi\|_{\mathrm{Var}}=0,$$

其中 $P_t(x,dy)$ 是马氏过程的转移概率, π 是其平稳分布, 而 $\|\cdot\|_{\mathrm{Var}}$ 是全变差范数.

定理 设 $(E,\mathscr{E})$ 为可数生成的可测空间(即 $\mathscr{E}$ 可数生成). 则其上的可逆马氏过程, 只要它的转移概率关于可逆测度 π 有密度, 则有如下蕴涵关系图.

各种遍历性蕴含关系图

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \text{Nash 不等式} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{对数 Sobolev 不等式} \arrow[d, Rightarrow] & & L^1 \text{ 指数式收敛} \arrow[d, equal] \\
\text{依相对熵指数式收敛} \arrow[d, Rightarrow] & & \pi\text{-a.s. 强遍历} \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{Poincaré 不等式} \arrow[rr, Leftrightarrow] & & \pi\text{-a.s.指数式遍历} \arrow[dl, Rightarrow] \\
 & L^2 \text{ 代数式收敛} \arrow[d, Rightarrow] & \\
 & \text{通常遍历性} &
\end{tikzcd}
$$

此图是完备的, 即图中的任意两条性质之间不存在新的蕴涵关系. 此外, 图中仅有三个古典遍历性是已知的, 可见此图显著地丰富了遍历理论.

各种不等式

跳过程可用 q 对 $(q(x),\ q(x, A))$ 描述, 可逆时关于其可逆测度 π, 可在 $L^2(\pi)$ 空间上定义

Dirichlet 型

$$D(f,f) = \frac{1}{2}\int_E \pi(dx)\int_E q(x,dy)(f(y)-f(x))^2,$$
$$f \in \mathscr{D}(D) := \{f \in L^2(\pi) : D(f,f) < \infty\} \subset L^2(\pi).$$

然后可定义上图左边的三种不等式:

Poincaré 不等式: $\quad \mathrm{Var}(f) \leqslant C D(f), \quad f \in L^2(\pi),$

对数 Sobolev 不等式: $\quad \int f^2 \log \frac{f^2}{\|f\|_2^2} d\pi \leqslant C D(f), \quad f \in L^2(\pi),$

Nash 不等式: $\mathrm{Var}(f) \leqslant C D(f)^{1/p} \|f\|_1^{2/p^*}, \quad f \in L^2(\pi),$

此处 $1/p^* + 1/p = 1$.

各种不等式相应的稳定性

Poincaré 不等式 $\Longleftrightarrow$ L^2指数式收敛

$$\mathrm{Var}(P_t f) \leqslant \mathrm{Var}(f)\exp[-2\lambda_1 t],$$

对数 Sobolev 不等式 $\Longrightarrow$ 依相对熵指数式收敛：

$$\mathrm{Ent}(P_t f) \leqslant \mathrm{Ent}(f)\exp[-2\sigma t],$$

Nash 不等式 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Var}(\mathrm{P_t f}) \leqslant \mathrm{C}\|\mathrm{f}\|_1^2/\mathrm{t}^{\mathrm{p}^*-1}$.

需要不同的收敛性的原因是如 Kolmogorov 所说: 每一种逼近或 (收敛性) 必定有一种最合适的度量. 众所周知，收敛性问题是数学大多数分支共同的研究课题；然而关于其速度的研究相当有限，这源于问题的难度，定量比定性研究要艰难得多. 然而，一种数学理论，如果仅有稳定性的定性结果而无稳定性的速度估计，那么无论从理论上或从应用角度看，都是不够成熟的.

今考虑在区间 $[0,\infty)$ 上的一维扩散过程, 左端点 0 为反射边界, 即 $f'(0)=0$. 算子为

$$L = a(x)\frac{d^2}{dx^2} + b(x)\frac{d}{dx}.$$

定义

$$C(x) = \int_0^x b/a, \qquad \mu[x,y] = \int_x^y e^C/a$$

我们常略去 Lebesgue 测度不写.

那么, 我们有下页表所示的 11 个显式判准.

下页表中的第 4, 6, 7 行的性质栏中均含两条, 而判准相同. 这表明两条性质等价. 当然, 此结果的证明并不简单. 例如第 4 行的两条性质, 我们引进了单重积分算子 I 和双重积分算子 II:

$$I(f)(x) = \frac{e^{-C(x)}}{f'(x)}\int_x^D [fe^C/a](u)\mathrm{d}u, \qquad f\in\mathscr{F},$$

$$II(f)(x) = \frac{1}{f(x)}\int_0^x \mathrm{d}y e^{-C(y)}\int_y^D [fe^C/a](u)\mathrm{d}u, \quad f\in\mathscr{F}'.$$

其中

$$\mathscr{F} = \{f\in C[0,D]\cap C^1(0,D): f(0)=0,\ f'|_{(0,D)}>0\},$$

$$\mathscr{F}' = \{f\in C[0,D]: f(0)=0, f|_{(0,D)}>0\}.$$

若记所述性质成立的最佳常数为 $A<\infty$, 当算子的系数 a, b 连续时, 我们有如下对偶变分公式

$$A=\inf_{f\in\mathscr{F}'}\sup_{x\in(0,D)} I\!I(f)(x)=\inf_{f\in\mathscr{F}}\sup_{x\in(0,D)} I(f)(x),$$

$$A=\sup_{f\in\widetilde{\mathscr{F}}'}\inf_{x\in(0,D)} I\!I(f)(x)=\sup_{f\in\widetilde{\mathscr{F}}}\inf_{x\in(0,D)} I(f)(x).$$

这里,

$$\widetilde{\mathscr{F}}=\big\{f\in C[0,D]: f(0)=0, \exists\, x_0\in(0,D] \text{ such that } f=f(\cdot\wedge x_0),$$
$$f\in C^1(0,x_0), f'|_{(0,x_0)}>0, \text{ and } f\in L^2(\pi) \text{ if } x_0=\infty\big\},$$
$$\widetilde{\mathscr{F}}'=\big\{f\in C[0,D] : f(0)=0, \text{ there exists } x_0\in(0,D] \text{ such that}$$
$$f=f(\cdot\wedge x_0), f|_{(0,x_0)}>0, \text{and } f\in L^2(\pi) \text{ if } x_0=\infty\big\}.$$

Eleven criteria for one-dimensional diffusions

Property	**Criterion**
Uniqueness	$\int_0^\infty \mu[0,x]e^{-C(x)}=\infty \quad (*)$
Recurrence	$\int_0^\infty e^{-C(x)}=\infty$
Ergodicity	$(*)\ \&\ \mu[0,\infty)<\infty$
Exponential ergodicity L^2-exp. convergence	$(*)\ \&\ \sup_{x>0}\mu[x,\infty)\int_0^x e^{-C}<\infty$
Discrete spectrum	$(*)\ \&\ \lim_{x\to\infty}\mu[x,\infty)\int_0^x e^{-C}=0$
Log. Sobolev inequality Exp. convergence in entropy	$(*)\ \&\ \sup_{x>0}\mu[x,\infty)\log[\mu[x,\infty)^{-1}]\int_0^x e^{-C}<\infty$
Strong ergodicity L^1-exp. convergence	$(*)\ \&\ \int_0^\infty \mu[x,\infty)e^{-C(x)}<\infty$
Nash inequality	$(*)\ \&\ \sup_{x>0}\mu[x,\infty)^{(\nu-2)/\nu}\int_0^x e^{-C}<\infty$

Here (*) means that the uniqueness condition in the first line is required in each of the later cases.

由此可导出计算 A 的迭代程序. 然而, 对于表中第 6, 8 行的性质, 因为非线性, 刚才的方法失效. 我们使用了 Orlicz 空间技术, 参见本人的专著 [4] 的第 6 章.

上述表中, 从上到下, 诸项性质是逐步增强的. 从遍历性开始, 其无穷远处可视为反射边界. 因此, 刚才我们所讨论的是半空间上两头反射边界(又称 Neumann 边界, 简记 N 边界), 所以这属于 NN 边界情形. 如将 Neumann 边界换成 Dirichelt 边界, 则可研究 DD 边界情形. 组合起来还有 ND, DN 边界共四种边界条件. 对于每种边界条件, 均可建立其主特征值的平行理论.

至此, 我们处理的还是一维情形. 对于高维情形, 我和王凤雨曾经发表过一文 [7]. 记得当初此文投稿时, 审稿人批评我们没有认真查阅文献, 似乎对此重要问题前人可能有大量成果. 当时, 我确实只从身边已有的文献查到两个简单实例, 并没有系统调查. 于是我和王跑到学院资料室, 把《数学评论杂志》抱过来, 查阅所有有关特征值估计的论文. 结果发现, 全部文章都限于 Dirichlet 边界, 未见到任何处理遍历情形的文章. 我们如实地告知该刊, 因而此文得以发表. 根本原因在于当时仅有的数学工具是极大值原理(后来已证这等价于 Dirichlet 特征值的正性*). 但在我们的情况下, 特征函数为零的超曲面当然在区域内部, 无法显式刻画! 所以极大值原理基本上用不上. 我们也使用过分裂技术, 即使用流动的零曲面作为边界, 将区域分裂成两块, 在两块上分别使用极大值原理. 我和王以此改进几何学上著名的 Cheeger 不等式. 但后者并非显式估计, 而且结果较粗.

我们真正的突破是使用概率方法替代极大值原理. 想法是把已知过程从单个提升为两个, 即考虑从两个不同出发点出发的两个随机过程(实质的过程不变, 只变出发点). 因为两个出发点任意, 容易想象, 如两过程总能走到一起, 原过程就应当遍历. 但需留心, 如果不给力, 各走各的, 就很难相遇了. 所以需要干预. 一种做法如下: 在两个出发点的中间点上做一个垂直超平面. 当左边这个过程运动时, 命令右边的过程依照左边过程关于超平面的反射轨道走. 这样, 两个过程就容易碰面了. 我们把如此构造的右方的过程称为左方过程的反射. 把这两个过程合并为乘积空间上的过程, 我们只关心它的两个分量(称为边缘过程)何时相遇. 两者之间的距离为半空间 $[\mathbf{0}, \infty)$ 上的随机过程, 问题是这个(距离)过程以多快速度到达零. 这回归前面已讨论过的一维问题.

*Refer to “Berestycki, H. and Nirenberg, L. and Varadhan, S.R.S., The principal eigenvalue and maximum principle for second-order elliptic operators in general domains, Comm. Pure and Appl. XLVII: 47–92.”

基于以上想法, 陈、王 (1997) [8] 得到如下结果.

定理 对于紧黎曼流形，分别以 d、D、K 表流形的维数、直径和 Ricci 曲率下界，则有公式:

$$\lambda_1 \geqslant 4 \sup_{f\in\mathscr{F}} \inf_{r\in(0,D)} \frac{f(r)}{\int_0^r C(s)^{-1}ds\int_s^D (fC)(u)du}$$

这里仅用到两个记号: $C(r)=\left(\cosh\left[\frac{r}{2}\sqrt{\frac{-K}{d-1}}\right]\right)^{d-1}$, $\mathscr{F}$ 为 $[0,D]$ 上正的连续函数的全体. 此公式不仅统一了、而且把几何学家(包括 A. Lichnerowicz 和丘成桐等在内)四十年来所得到的十种著名估计全部改进.

十种著名估计(其中七种加黑者最优)

Author(s)	Lower bound	
A. Lichnerowicz(1958)	$\boldsymbol{\frac{d}{d-1}K,\quad K\geqslant 0}$	(1.1)
P.H. Bérard, G. Besson, & S. Gallot(1985)	$\boldsymbol{d\left\{\frac{\int_0^{\pi/2}\cos^{d-1}tdt}{\int_0^{D/2}\cos^{d-1}tdt}\right\}^{2/d},\quad K=d-1>0}$	(1.2)
P. Li & S.T. Yau(1980)	$\frac{\pi^2}{2D^2},\quad K\geqslant 0$	(1.3)
J.Q. Zhong & H.C. Yang(1984)	$\boldsymbol{\frac{\pi^2}{D^2},\quad K\geqslant 0}$	(1.4)
D.G. Yang(1999)	$\boldsymbol{\frac{\pi^2}{D^2}+\frac{K}{4},\quad K\geqslant 0}$	(1.5)
P. Li & S.T. Yau (1980)	$\frac{1}{D^2(d-1)\exp\left[1+\sqrt{1+16\alpha^2}\right]},\quad K\leqslant 0$	(1.6)
K.R. Cai(1991)	$\boldsymbol{\frac{\pi^2}{D^2}+K,\quad K\leqslant 0}$	(1.7)
D. Zhao(1999)	$\boldsymbol{\frac{\pi^2}{D^2}+0.52K,\quad K\leqslant 0.}$	(1.8)
H.C. Yang(1990) & F. Jia(1991)	$\boldsymbol{\frac{\pi^2}{D^2}e^{-\alpha},\quad \text{if } d\geqslant 5,\quad K\leqslant 0}$	(1.9)
H.C. Yang(1990) & F. Jia(1991)	$\frac{\pi^2}{2D^2}e^{-\alpha'},\quad \text{if } 2\leqslant d\leqslant 4,\quad K\leqslant 0$	(1.10)

相应于扩散过程的 11 判准, 对于生灭过程, 我们有近乎平行的 10 个显式判准, 仅有一例外是 LogSobolev 不等式不再等价于、而是强于关于相对商的指数收敛性, 很遗憾, 我们尚未见到关于后者的显式判别准则.

在经过了 20 年的探索、有了一套理论之后，我们回到起始点：研究相变现象. 以此检阅所发展的工具的有效性. 我们考察格子上的欧氏量子场模型: φ^4 模型. 格子是 $\mathbb{Z}^d$. 在每一格子点 $i \in \mathbb{Z}^d$ 上, 势函数是 4 阶: $u(x_i) = x_i^4 - \beta x_i^2,\ \ x_i \in \mathbb{R}$, β 表示反温度. 系统的交互作用是紧邻的: $H(x) = -J\sum_{\langle ij\rangle} x_i x_j$, $J \geqslant 0$, $i, j \in \mathbb{Z}^d$, $\langle ij\rangle$ 表示 $\mathbb{Z}^d$ 中的紧邻边, $x_i, x_j \in \mathbb{R}$. 对于固定的边界 ω 和有限盒子 $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, 系统的局部算子可写成 $L_\Lambda^\omega = \sum_{i\in\Lambda}\big[\partial_{ii} - \partial_i(u + H_\Lambda^\omega)\partial_i\big]$. 目标是寻找此算子的谱隙 $\lambda_1^\beta(\Lambda, \omega)$ 和最佳对数 Sobolev 常数 $\sigma^\beta(\Lambda, \omega)$ 关于边界条件 ω 和有限盒子 Λ 的一致估计.

欧氏格子量子场的 φ^4 模型

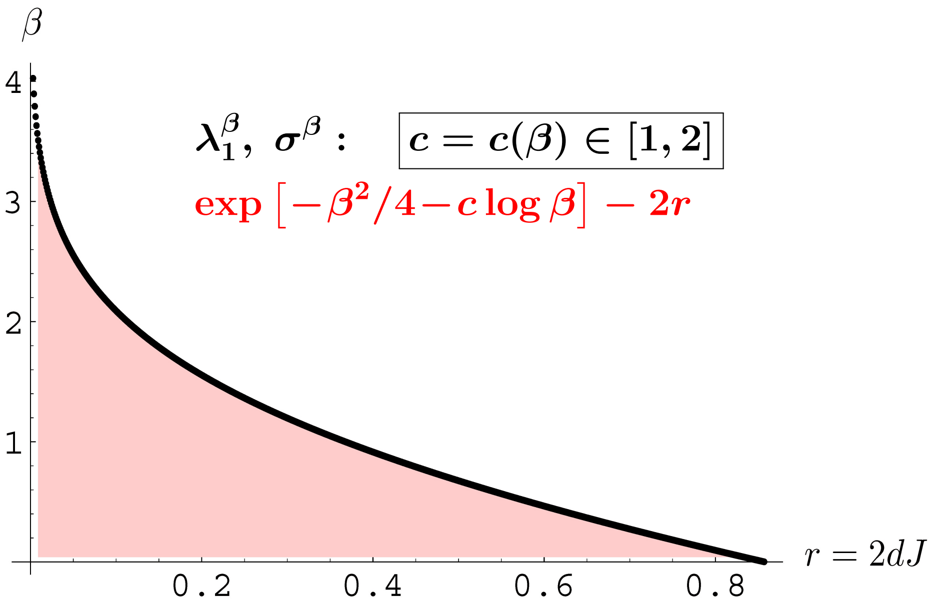
定理 (陈 2008 [5]) 我们有

$$\begin{aligned}\inf_{\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d} \inf_{\omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} \lambda_1^\beta(\Lambda, \omega) &\approx \inf_{\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d} \inf_{\omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} \sigma^\beta(\Lambda, \omega) \\ &\approx \exp\big[-\beta^2/4 - c \log \beta\big] - 4dJ.\end{aligned}$$

其中 $c := c(\beta) \in [1, 2]$. 这里, $f(\beta) \approx g(\beta)$ 是指当 $\beta \to \infty$ 时，$f(\beta)$ 与 $g(\beta)$ 有相同的收敛主阶.

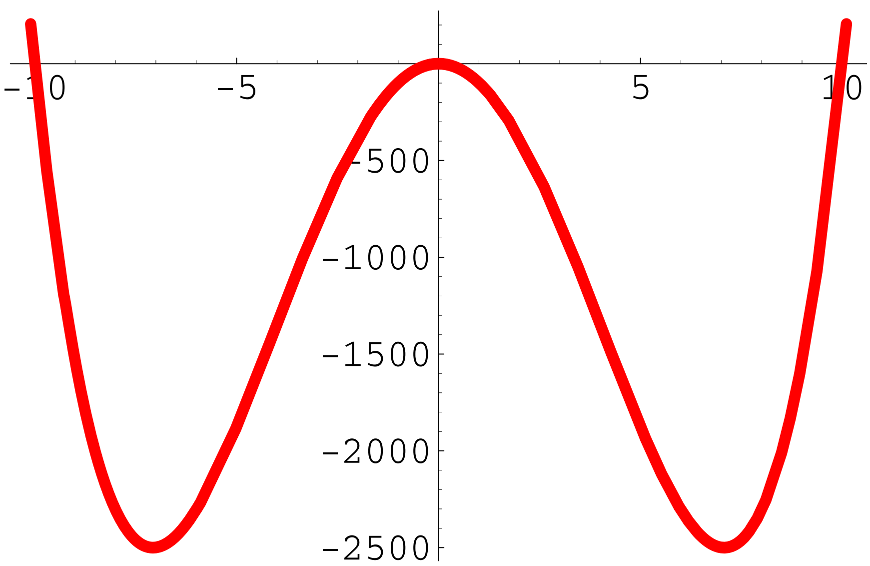
下述图中的阴影部分为遍历区域，曲线往左上方外一点，是非遍历区域. 这个模型会发生相变,这是因为, 如随后 u 的图所示, 势函数是双井的，处于一个坑时，在低温区难于跨出到另一坑. 此乃相分离.

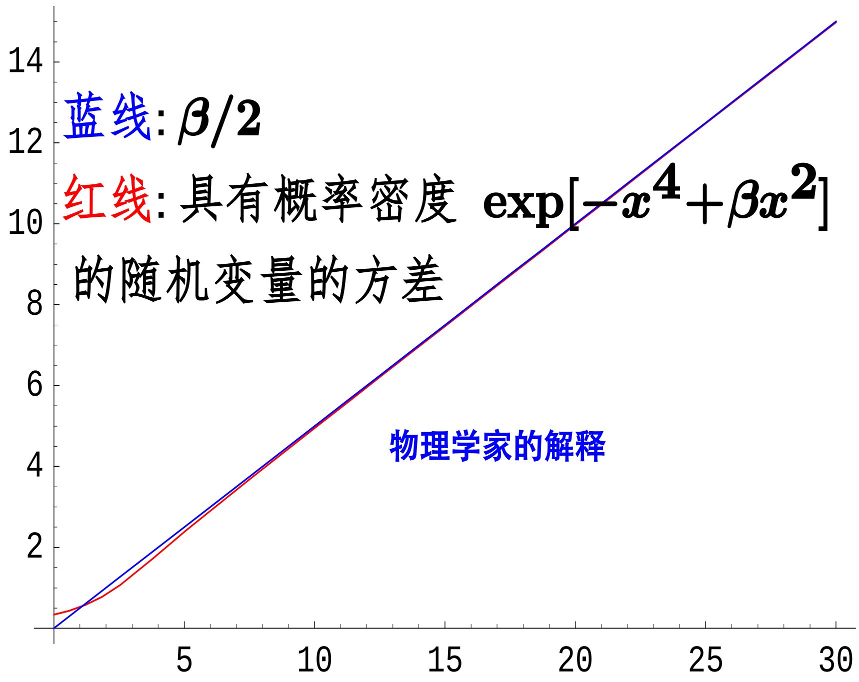
无穷维有相变



无穷维有相变. 因势函数 u 有双井

$u(x) = x^4 - \beta x^2, \quad \beta = 100$





此刻, 再引述海外同行关于第二项成果的鼓励(再次请读者多包涵)

M. Znojil (2003), Zbl. Math., 01782097.
The work is a continuation of its seven (all self-) references...but offers very nice results (their essence being well characterized by the title, and they look 'final'. Amazingly enough, there explicit bounds are complete (i.e., both-sided)! Three illustrative examples demonstrate their power in applications."

关于第二项成果还有专著的书评

- L. Miclo's review (Math Review, MR2091955, 2005): "these fields have been very active recently, in particular due to the contributions of the Beijing school led by Mr. Chen."
- 英国皇家学会会员 D.G. Aldous 等 9 人多次将专著 [1] 列为"Standard reference."
- R. Durrett(美国科学院院士) (SIAM Review, Book Reviews 48:1 (2006), p.164): "Inequalities for the spectral gap and their applications are a huge topic. Chen's 228-page book takes the reader on a tour of some of this material. The emphasis is on topics that Chen has contributed

to (and I think this is appropriate), but this includes a wide variety of interesting topics."

"Chen has carried out an active research program and traveled extensively (as indicated by the long list in the acknowledgments).

Chen is an experienced researcher who has won prizes in China and spoken at the International Congress of Math, and he is an extensive writer of lecture notes. "

更多书评见本人主页专著栏目后面的"Book Reviews".

国家级创新研究团队

因为在 1978 年之前, 本人在几十年间一直是单枪匹马, 没有可交流的环境和机会. 1978 年读研开始, 有了小集体, 产生了一个梦想: 期望将来我们能有一个团队, 让海外能知道中国也有一小团队做得不错. 此处, 我们列出后来的相关进展.

- 2001 年, 国家自然科学基金委审批了北师大概率论创新研究团队, 这是国内数学方面首个团队.
- 2000—2009 的十年间, 基金委共资助了 225 个团队, 22 个群体获(最多)三期资助, 我们是其中之一.
- 2009 年再选拔团队作国际评审, 我们也是其中之一.
- 当年基金委主任陈宜瑜教授在发表于《科学时报》(2010-9-2 A1 要闻)中特别写道: 以陈木法教授为学术带头人的北京师范大学"概率论研究"...(等四个群体)都是其中的佼佼者.
- 群体于 2006 年获首都五一劳动奖状和全国五一劳动奖状.

这样, 我们经历了 23 年才实现早年的梦想.

三、与经济的交叉:
经济最优化的首个精密理论.

作为随机数学与经济交叉, 我们已出版两本书

- 计划经济大范围最优化数学理论(新版), 华罗庚著, 陈木法,石昊坤编, 北京师大出版社, 2025.
- 华罗庚经济优化新理论与实证, 陈木法, 谢颖超, 陈彬, 周勤, 杨婷著, 北京师大出版社, 2025.

更多材料, 包括陈彬,谢颖超,杨婷,周勤所写的理论综述"经济最优化的华-陈新理论"(中、英文), 均可在本人主页 https://math0.bnu.edu.cn/chenmf/ 中找到.

经济最优化的精密理论. 当然, 这是作为精密科学的首个理论. 我们在华先生工作的基础上, 经过必要的修正与更新, 完成了经济优化新模型; 进一步将经济模型的优化理论的研究转化为随机数学的研究; 找到了转移概率矩阵等基本不变量. 取得了四大进展: 一是给出了经济系统产品的等级排序与分类方法; 二是提供了较为完整的高效算法, 大大提高计算精度; 三是给出了不同经济增速下产综与消费之间的预测与调控模型; 四是在保证经济系统稳定性的前提下, 实现了经济结构优化的设计与调试. 同时, 已经成功地应用于我国 7 份国家级 (时间跨度 30 年)、1 份省级、2 份国外的投入产出表, 验证了上述成果不仅在理论上可靠, 而且在实践中切实可行. 这个精密理论可程序化、可智能化. 目前的最大期盼是应用于实践.

四、数学研究深层中的优选法.

访谈录†：似乎可以公平地说，无论如何，优选法总是在背后发挥作用

优选法影响了本人毕生的命运. 因当年“文革”的特殊情况, 我们北京师大 1969 和 1970 两届毕业生被推迟到 1972 年才分配工作. 当年共有五位北师大同学被分配到贵阳师范学院(今贵州师大)附中. 基本上一辈子教中学. 我的运气在于离京前不久到北京棉纺厂听了华罗庚先生的推广优选法报告, 对于已自学数学 12 年的我, 听到优选法直接成功地应用于生产一线, 极为震惊, 受到极大震憾, 所以我到贵阳之后, 马上到省科技情报所打听当地有什么实际部门希望应用优选法. 运气真好, 竟找到贵州省汽车大修厂的电镀车间渴望做试验. 所以我利用课余或周末到厂里帮忙. 经过两、三个月的试验, 获得成功. 工人们很高兴, 写信给省广播电台, 听到新闻传播之后, 就有更多单位来请, 迅速扩大了影响. 甚至省里的主管工业的贾庭三书记都到报告现场听报告. 我当天讲这几天我在贵阳锁厂推优. 结果第二天贾书记就带着省工业厅长到贵阳锁厂, 对我说: “陈老师, 麻烦你给x厅长讲 15 分钟优选法”. 当年, 是周恩来总理的指示, 华先生带领小分队在全国各地推广优选法. 1975 年, 本人有幸作为贵州省的代表之一, 参加华老的小分队, 到山西省推优. 贵阳师院数学系的老师们也受到鼓舞, 强烈要求把我调到数学系. 所以我于 1974 秋季到数学系, 从此有了做数学的基本条件. 刚到时, 我开设了一门优选法

†见本人主页“科普作品”栏目的 [21]

的课程, 然后带学生到遵义推广优选法. 从 1972 到 1978 年的六年时间里, 跑遍几十家工厂, 到许多行业推优. 这六年, 对我来说是一次灵魂的洗礼, 深切体会到工农群众需要科学, 国家需要科学, 真正明白自己该做什么.

下面概述笔者在优选法理论方面的一些工作. 我们知道, J. Kiefer 对优选法的原始贡献是寻求在固定实验次数条件下对任何单峰函数都适用的最优策略. 使用 Fibonacci 级数: $F_0 = 1, F_1 = 1, F_2 = 2, F_n = F_{n-2} + F_{n-1}, n \geqslant 2$. 结论是: 如固定 n 步试验, 则选用分数 F_n/F_{n+1} 为第一个试点, 然后依对称法则安排第二个试点. 称为分数法. 他也已指出: 如果嫌麻烦, 那么取极限

$$\omega := \lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

以此黄金分割常数作为第一个试点即可. 此法称为黄金分割法. 华先生在推广优选法时, 直接推广黄金分割法, 因为他证明了黄金分割法在无穷远处是最优的, 而把分数法视为黄金分割法的一种近似的特殊方法. 其理论依据是分数法所用的分数列是黄金分割常数的最佳逼近序列. 此乃数论中的丢番图逼近. 总而言之, Kiefer 和华的优选法都是预定次数的方法, 前者定在有很次, 后者定在无穷远.

我在几年的实践中, 觉得预定试验次数实际上不可行. 还没有测试之前, 谁知道要做多少次试验才能得到满意的结果. 所以想到应当把 Kiefer 的原始想法“对任何单峰函数”提升一步同时“对任何试验次数”都适用的最优方法. 按照这个观点, 我在 1977 年写过两文 [1], 1995 年又写了一文 [6]. 包括每批多个试点情形. 特别地, 如果每批都安排同样的偶数多个试点, 则无穷远处的最优策略根本不存在. 但我们的不定批数条件下的最优策略就是每批最简便的均分试点, 只是每批两个试点情形稍许特殊一点: 其第一批的两个试点安排在 3/7 和 4/7; 从第二批开始都用均分法.

上面所讲的四个方面的课题, 其中后两个都是接着华先生的工作做的. 其背景是: 我从初中二年级开始 (当年十五岁), 受华先生自学成才而成为大数学家故事的激励, 开始自学数学, 上大学时也只正规上过七个月课, 一辈子全靠自学. 可以想象, 当年没有人教我如何自学. 但天无绝人之路, 记得那时我曾从中学图书室借到华先生的一本小册子 [12], 真是如获至宝, 从中得到太多教益. 在成长过程中, 怎么自学, 怎么做研究, 一

切的一切, 都是从华先生的论著中找到答案. 相信终生不会忘记华老的格言:“聪明在于勤奋, 天才在于积累”.

愿我们学术上的传承能够告慰华老的在天之灵!

参考文献

[1] 陈木法. 论不是次(批)条件下单因素优选问题的最优策略(两文及补充)，贵阳师院学报，1977，3，117-134.

[2] Chen, M.F., From Markov chains to non-equilibrium particle systems, World Scientific, Singapore, Second edition, 1992/2004 (第一、二版).

[3] Chen M.F., Infinite dimensional reaction-diffusion processes, Acta Math. Sin. New Ser. 1985.

[4] Chen M.F., Eigenvalues, inequalities, and ergodic theory, New York, Springer, 2005.

[5] Chen M.F., Spectral gap and logarithmic Sobolev constant for continuous spin systems, Acta Math. Sin. New Ser. 24:5, 705–736, 2008.

[6] Chen M.F. and Huang, D.H. On the optimality in general sense for odd-block search, Acta Math. Appl. Sin., 1995, 11:4, 389-404.

[7] Chen, M.F., Wang, F.Y., Estimation of the first eigenvalue of second order elliptic operators, J. Funct. Anal. 131:2, 345-363, 1995.

[8] Chen, M.F., Wang, F.Y., General formula for lower bound of the first eigenvalue on Riemannian manifolds, Sci. Sin. 40(4): 384–394. 1997.

[9] Chung, K.L., Markov Chains with Stationary Probabilities, 1967.

[10] Durrett, R. Ten Lectures on Particle Systems, LNM 1608, 1995.

[11] 侯振挺, Q 过程的唯一性准则, 1982.

[12] 华罗庚, 给青年数学家, 中国青年出版社, 1956.

[13] Loève，M., Probability theory, 3rd ed, Van Nostrand, 1963.

[14] Liggett, T.M., The stochastic evolution of infinite systems of interacting particles, LNM 598, 1977.

[15] Preston, C. Random fields, 1976.

[16] 钱敏, 侯振挺等, 可逆马尔可夫过程, 湖南科学出版社, 1979.

[17] 严士健，王隽骧，刘秀芳., 概率论基础, 科学出版社, 1982.

2026/01/13