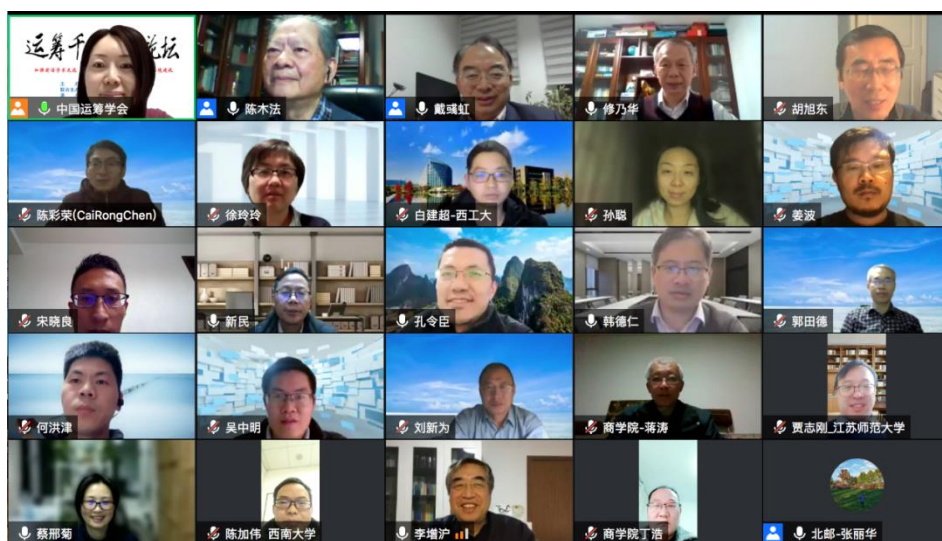


从华罗庚经济最优化模型谈起——运筹千里纵横论坛第四十二期侧记

陈木法院士报告回放地址：<https://www.bilibili.com/video/BV1kt4y1z7a7>

2021年1月13日晚20:00-21:30，运筹千里纵横论坛（第四十二期）通过腾讯会议平台如期举行。本期报告由中国科学院院士陈木法主讲，中国运筹学会理事长戴彧虹研究员主持。中国运筹学会名誉理事长胡旭东研究员、副理事长郭田德教授、北京师范大学李增沪教授、重庆师范大学杨新民教授、北京航空航天大学韩德仁教授、北京交通大学修乃华教授、河北工业大学刘新为教授等专家出席本次活动，对论坛给予了大力支持。超1000名海内外学者通过腾讯会议和bilibili在线平台参加了本次活动。



本期运筹千里纵横论坛，陈木法院士作了题为“从华罗庚经济最优化模型谈起”的精彩学术报告。



在本次报告中，陈木法院士从理想化的华罗庚经济模型谈起引出特征值问题，详细介绍了华罗庚经济模型（理想化模型）的基本定理和证明提要，华模型的各

种拓广模型，其中重点阐述了带消费的一般模型，并从基本的无消费随机模型谈到最新研究成果——最大特征对算法，最后还具体介绍了包括算法、量子力学、稳定性速度估计在内的相关论题。具体报告内容如下：

一、 华罗庚经济模型（理想化模型）

陈木法院士首先回顾了产综、结构方阵（消耗系数方阵）、投入产出法的相关定义及相关公式的意义。进一步详细介绍了理想化模型，理想化模型即假定所生产的东西全部用于再生产，投入为消耗系数方阵的最大左特征向量，并通过一个例子给出了失衡时刻（崩溃时刻）的定义和实际应用意义。

华罗庚基本定理. 左正特征向量法

理想化模型:

- 最好的投入 $x_0 = A$ 的**最大左特征向量**. 此时有最佳发展速度 $\rho(A)^{-1}$.
- 否则, 只要 $A^{-1} \not\geq 0$, 就必然走向失衡, 即**失衡时**

$$T := \inf\{n : x_n \text{ 的某个分量} \leq 0\} < \infty.$$

华的前所未有的贡献是第二条.

Perron-Frobenius 定理: 最大特征值为正的、单的, 最大左、右特征向量为正[且唯一].

陈木法 (BNU) 华罗庚经济模型 2021年1月13日 5 / 32

之后陈木法院士给出了华罗庚基本定理及其证明提要。首先从概率角度考虑，将消耗系数方阵 A 转化为转移概率矩阵 P，借助遍历定理和相关极限理论证明了最佳投入应为 P 的最大左特征向量，其次再进一步考虑一般的消耗系数方阵 A，利用 A 的最大左、右特征向量构造出 P，将 A 转化为 P，继而间接证明了结论。

华罗庚基本定理的证明提要 [陈 1989/9]

$A = P: 0 \leq P, P\mathbf{1} = \mathbf{1}$, **右 $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$** $P^n = (p_{ij}^{(n)})$,
此处 $\mathbf{1}$ 为分量均为 1 的列向量. 由遍历定理:

$$p_{ij}^{(n)} \rightarrow \pi^{(j)} \quad \forall i, \quad \pi = (\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \dots, \pi^{(d)})$$
$$P^n \rightarrow \mathbf{1}\pi \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \quad 0 \leq \pi, \quad \pi\mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

π 为 P 的平稳分布(唯一稳定解!): $\pi = \pi P$.

对于 A , 最大左、右特征向量对称, 为何选左?

对于 P , 最大左、右特征向量分别为 π 和 $\mathbf{1}$, 自然选左!

华罗庚基本定理的证明提要 [陈 1989/9]

$A = P: 0 \leq P, P\mathbf{1} = \mathbf{1}$, **右 $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$** $P^n = (p_{ij}^{(n)})$,
此处 $\mathbf{1}$ 为分量均为 1 的列向量. 由遍历定理:

$$p_{ij}^{(n)} \rightarrow \pi^{(j)} \quad \forall i, \quad \pi = (\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \dots, \pi^{(d)})$$
$$P^n \rightarrow \mathbf{1}\pi \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \quad 0 \leq \pi, \quad \pi\mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

π 为 P 的平稳分布(唯一稳定解!): $\pi = \pi P$.

对于 A , 最大左、右特征向量对称, 为何选左?

对于 P , 最大左、右特征向量分别为 π 和 $\mathbf{1}$, 自然选左!

二、 拓广模型

华模型的拓广模型有很多, 陈木法院士简单介绍了市场经济模型和随机模型, 并重点介绍了带消费的一般模型。市场经济模型只需将前面模型中的消耗系数方阵 A 换成 $V^{-1}AV$, 其中 V 是元素为 v_i / p_i 的对角阵, p_i 是市场价格向量, v_i 是 A 的最大右特征向量。随机模型则考虑消耗系数方阵, 以 $1/6$ 的概率作 1% 的摄动得到一随机方阵及其相对应的随机序列, 得到随机情形下的无消费经济模型, 通过带入具体数值计算分析可以断定随机因素不可忽略, 陈木法院士还在此基础上给出了随机情形的华结果及相关定理, 并在此情形下提出问题: 该如何调整经济结构?

2 拓广模型. 随机、带消费

定理 (V.I. Oseledec, 1968)

设 $\mathbb{E} \log^+ \|A_1\| < \infty$. 则

$$\frac{1}{n} \log \|M_n\| \xrightarrow{\text{a.s.}} \gamma \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R},$$

其中 $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} \log \|M_n\|$.

定理 (陈 & 李勇, 1994)

假定 $\{B_n\}$ 独立同分布. 在合理条件下, 我们有
 $\mathbb{P}[T^x < \infty] = 1, \quad 0 < \forall x \in \mathbb{R}^d$.

问题: 如何调控经济? 结构调整.

陈木法 (BNU)

华罗庚经济模型

2021年1月13日

20 / 32

在带消费的一般情形中, 设定消耗系数方阵 A 非负、不可约、可逆, 首先简单介绍了无消费理想模型, 再具体介绍了带消费实用模型, 以 1997 年山东省 6 部门的投入产出表为例, 具体分析了消费比例在 0 到 1 之间波动时, 失衡时刻的变化, 当消费比例逐渐增大到 1 时, 可取值空间的维数即自由度逐渐增大, 失衡时刻也在逐渐增大, 经济结构也应随之调整。

当 $\alpha \uparrow$ 时, x_0 的自由度 = 可取值空间的维数 \uparrow .

定理 (x_0 的自由度 (华罗庚 & 华苏, 1985))

$\{\lambda_j\}$: A 的特征值(可重), $\lambda_1 = \rho(A) > 0$ 单⁺. 命

$$\Phi(z) = \left[1 + \frac{2\lambda_1 \varphi(z)}{\lambda_1^2 - |z|^2} \right]^{-1}, \quad \varphi(z) = |z|^2 - \lambda_1 \operatorname{Re} z$$

for $z \in \mathbb{C}$ with $|z| < \lambda_1$. 那么

自由度 = $\#\{\lambda_j \in \mathbb{C}: \lambda_j \neq 0 \text{ 且 } \varphi(\lambda_j) > 0, \text{ 包括 } \lambda_j \text{ 的重数}\}$.

留意 $\Phi(z) = \Phi(\bar{z})$, $\Phi(z) \in (0, 1) \Leftrightarrow \varphi(z) > 0$.

如 $\alpha > \Phi(\lambda_{\#})$, 则 x_0 的自由度增加一个(如 $\lambda_{\#} < 0$)或两个(如 $\lambda_{\#}$ 复共轭)+重根重数.

陈木法 (BNU)

华罗庚经济模型

2021年1月13日

09:03:33

13 / 32

三、 相关论题

在之前内容的基础上, 陈木法院士继续介绍了与华模型相关的论题和近期研究进展。在介绍华模型的关键算法(最大特征对计算)之后, 陈木法院士通过给

出两个例子以及随机测试的一系列结构解释了最大特征对计算的具体思想，并向我们介绍了 2019 的最新研究成果——最大特征对计算的可行通用算法。在此之前，一直都没有成熟算法。进一步，由最大特征对再延伸到统计力学、稳定性的速度估计以及三对角阵和二阶椭圆的各类稳定性的显式判别准则。

2) 计算: 最大特征对. 无成熟算法

例 (陈 & 李月爽, 2019b, 例 9)

设 $A = (a_{kj})_{k,j=1}^d$, $a_{kj} = 2^{-j}(2^{k^j} - 1)$. 则

- Mathematica 中的 'Eigensystem' 只能算到 $d=11$; 当 $d=12$ 时, 分量变号与 PF 定理相悖.
- MatLab 中的 'eig' 只能算到 $d=188$; 而 'eigs' 只能算到 $d=104$. 两例均可配称!

例 (陈 & 李月爽, 2019a, 例 4)

设 A 为三对角阵: 对角、下、上次对角线元素分别为常数 $-3, 1, 2$. 则 'Eigensystem' 只能算到 $d=81$; 'eig' 和 'eigs' 可分别算到 $d=107, 90$.

随后，陈木法院士给出了从优选法到随机数学及其交叉领域，再到计算数学与量子力学的交叉的研究路线，详细介绍了任意一可厄米方阵与生灭矩阵之间的等谱关系。由此可以看出随机数学、计算数学与量子力学之间的交叉，这进一步引导出量子力学的新架构、新谱论和新算法。在报告的最后，陈木法院士与大家分享了近期的研究进展并进行了讨论。

陈木法院士报告内容精彩有趣，讲解深入浅出，激起了听众们的浓厚兴趣。报告结束后，会议陆续收到了来自在线和直播间的多个问题，针对大家的问题，陈木法院士一一进行了详细的解答。最后，主持人戴彧虹研究员对陈木法院士的报告进行了总结，并代表与会听众对陈木法院士的精彩报告再次表示感谢。

报告专家简介

陈木法，教授，博士生导师，院士。1965年考入北京师大读本科，1978年再考读研。1980年留校工作。1983年在该校获理学博士学位。2003年当选中科院院士。主要研究兴趣：马尔可夫链和马氏跳过程，相互作用粒子系统和随机游，随机系统的稳定性速度和谱理论，随机数学及交叉研究领域。主页：<http://math0.bnu.edu.cn/~chenmf>。

北京邮电大学 张丽华 撰稿

2021年元月17日