华罗庚经济优化新理论

陈木法[1,2]

1. 江苏师范大学数学研究院,徐州 221116
2. 北京师范大学数学科学学院,数学与复杂系统教育部重点实验室,北京 100875

摘要　概述了华罗庚先生仙逝前对经济优化理论的重要更新,该结果不幸沉睡了37年,直到2021年底才被唤醒;介绍了其后续进展,有一次修正、一次再更新和5项新发展:稳定性分析的新方法;产品(产业)等级(排序);预测与调整;经济结构的优化;重排序与大矩阵主特征值(及依大、小序的前6个特征值)的高效算法。难得的是,多种变换给出了完全相同的非稳定的时间和产品。早年关于华氏经济崩溃定理的证明基于马氏链的遍历定理,最近的全部结果基于马氏链的转移概率矩阵,也许可视为经济优化研究的新路子。这些成果已被应用于中国1个省级和5个国家级投入产出表,检验了理论的合理性和可靠性。

关键词　经济优化理论;稳定性分析;产品等级;预测与调整;经济结构优化;算法;马氏链

1　华罗庚经济优化理论的核心结果:无消费情形

研究经济的主要工具是投入产出法,其基石是投入产出矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij}:i,j=1,2,\cdots,d)$。这里$a_{ij}$表示每生产一个单位的$i$类产品需要消耗$a_{ij}$单位的j类产品,称$\boldsymbol{A}$为消耗系数方阵或结构方阵。我们的目标就是从$\boldsymbol{A}$挖掘出该经济系统的各种特征(如摘要所述)。现把所关心的产品写成$\boldsymbol{x}=\left(x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(d)}\right)$,称为产综(固定单位:瓩,吨)。如分别以$\boldsymbol{x}_0$和$\boldsymbol{x}_1$表示投入和一年后的产出,则由$\boldsymbol{A}$的含义立知$\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{A}$。对于无消费的理想化模型,第$n-1$年的产出全部用于第$n$年的投入,于是有$\boldsymbol{x}_{n-1}=\boldsymbol{x}_n\boldsymbol{A}$及$\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{x}_n\boldsymbol{A}^n$, $n\geqslant 1$。如再设$\boldsymbol{A}$可逆,则得出投入产出的基本方程:$\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{A}^{-n}$, $n\geqslant 1$。非负矩阵最重要的结果是Perron-Frobenius定理。为陈述之,还需假设$\boldsymbol{A}$不可约:对于一切$i\neq j$,存在一列$i_0=i$, i_1, $\cdots$, $i_n=j$,使得$a_{i_0 i_1}a_{i_1 i_2}\cdots a_{i_{n-1} i_n}>0$。此时,由所述定理知:存在最大特征根$\rho(\boldsymbol{A})>0$(单根)及相应的左、右特征向量$\boldsymbol{u}$(行向量)和$\boldsymbol{v}$(列向量),两者均为正(而且不计常数因子时唯一)。现在,可陈述华罗庚基本定理(定理2.15,2.14)[1]:

假定$\boldsymbol{A}$不可约,则

1)经济系统的最佳投入为$\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{u}$(即$\boldsymbol{A}$的最大左特征向量),此时经济的最佳发展速度为$\rho(\boldsymbol{A})^{-1}$;

2)否则,如$\boldsymbol{x}_0\neq\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{A}$可逆且含一正的对角线元

收稿日期:2023-02-14;修回日期:2023-04-10
基金项目:国家自然科学基金项目(12090011);国家重点研发计划项目(2020YFA0712900);江苏高校优势学科建设工程项目
作者简介:陈木法,教授,中国科学院院士,研究方向为随机数学及其相关领域的交叉,电子信箱:mfchen@bnu.edu.cn
引用格式:陈木法. 华罗庚经济优化新理论[J]. 科技导报, 2023, 41(10): 5-8; doi: 10.3981/j.issn.1000-7857.2023.10.001

素,则必定存在自然数n_0,使当$n \geq n_0$时,产综$\boldsymbol{x}_n$含不同符号的分量,此时简称系统在时间n_0处崩溃。

华罗庚(华老)已多次指正,他的理论与列昂惕夫(投入产出法的提出者,于1973年获诺贝尔经济学奖)的主要差别在于前者将生产资料与消耗资料分开处理,以保证不可约性。后者不用此假定,但从数学上看会带来许多问题。

2 带消费情形华老的更新及我们的修正与再更新

上节的无消费模型是一个很好的数学样版,从问题的本质处入手,尽管相对简单且不切实际。实际中当然不能没有消费。在1984年和1985年春,华老曾引进并认真研究了一种处理方案。在2021年之前,我们一直延用该方案。华老对该方案并不满意,所以一直寻找更好的方案。他最后的手稿可能是1984—1985年的序列论文的最后一篇,编号(XI)(标明了写作日期为1985年4月20日),是对之前论文(I)~(X)的小结。此文他并未投稿,因为杂志标明该稿的收稿日期为1985年7月25日,比他仙逝的时间1985年6月12日还晚了43天。所以笔者猜测他应是在1985年4月20日至6月11日这段时间内完成了书稿《计划经济大范围最优化数学理论》[1](也是他仙逝后才出版的)。正是在这段时间内,他想到一个新方案,写在文献[1]的第65页末行至第66页第7行。在此书中,他对于前面的序列论文全部不提。2021年暑假,笔者见到此书时对于此事觉得奇怪,心想他可能来不及写完全书,哪知该书序言的第一句话为"序言是在书成之后写的,但总放在书的前面"。他接着写道:"探索也往往如此,由简单开始,在实践中,在思考中不断深化,不断发展。新的概念和方法出现,旧的不断被扬弃或遗忘,因而思索与实践的宝贵过程反而淹没不见了,而书上、文章上所见到的是成熟的或作者自以为成熟的结论。当然,不是说体系完备、证明严正的书不必要,而是说读后往往要花很多的时间和精力,才能领会这些结果是怎样得来的,作者为什么如此表达的,等等。"笔者获悉华老的新方法已是2021年年底,该想法已经沉睡了37年。因来之不易,所以写下这段历史。须知这是我们随后一系列工作的出发点。得益于华老的想法,经稍许修正(将消费"比例"改为"倍数")并再更新,我们得出如下解答:

对于带消费模型,只需使用$\boldsymbol{A}_\alpha$:

$$\boldsymbol{A}_\alpha = (1-\alpha)\boldsymbol{A} + \alpha\boldsymbol{I},$$

$$\rho\left(\boldsymbol{A}_\alpha\right) = (1-\alpha)\rho(\boldsymbol{A}) + \alpha, \alpha \in (0,1)$$

代替上节的$\boldsymbol{A}$即可,余者不变。简单地说,$\boldsymbol{A}_\alpha$乃无消费算子$\boldsymbol{A}$与无增长算子$\boldsymbol{I}$的凸组合,这里的$\boldsymbol{I}$是对角线元素均为常数1的对角矩阵。易见$\boldsymbol{A}_\alpha$的对角元全正。我们注意,虽然$\rho(\boldsymbol{A}_\alpha) \neq \rho(\boldsymbol{A})$,但诸$\boldsymbol{A}_\alpha$与$\boldsymbol{A}$有共同的最大左、右特征向量$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{v}$。

3 马尔可夫链技术

虽然马尔可夫链早在1989年就被笔者用来证明第1节中华氏定理的第(2)项断言(见文献[2]及所引文献),但只是这两年才逐步成为研究经济的基本工具。简单地说,我们常将关于$\boldsymbol{A}$(或$\boldsymbol{A}_\alpha$)的研究转化为对相应的转移概率矩阵(非负、每一行和为1的矩阵)的研究。使用前文记号$\rho(\boldsymbol{A})$及$\boldsymbol{v}=(v^{(1)}, v^{(2)}, \cdots, v^{(d)})$。$\boldsymbol{P}=(p_{ij})$的元素定义为

$$p_{ij} = \left(v^{(i)}\right)^{-1} \frac{a_{ij}}{\rho(\boldsymbol{A})} v^{(j)}, \quad i,j = 1,2,\cdots,d$$

等价地,$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}_v^{-1} \dfrac{\boldsymbol{A}}{\rho(\boldsymbol{A})} \boldsymbol{D}_v$

式中,$\boldsymbol{D}_v$表示以$\boldsymbol{v}$为对角线元素的对角矩阵。

容易验证$\boldsymbol{P}$的每一行和为1,从而最大特征值为1,而最大右特征向量为常值1的列向量。还可证明其最大左特征向量的诸分量为$u^{(k)}v^{(k)}=:\mu^{(k)}$,$k=1,2,\cdots,d$。常写成$\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{u}\odot\boldsymbol{v}$。这样,矩阵$\boldsymbol{A}$的三大特征$\rho(\boldsymbol{A})$、$\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$都融合于$\boldsymbol{\mu}$。更进一步,$\boldsymbol{u}\odot\boldsymbol{v}$有重要经济学含义:$\boldsymbol{u}$表示各产品的数量,$\boldsymbol{v}$表示各产品每个单位的真实价值[1](常不同于市场价格),这样,$\boldsymbol{u}\odot\boldsymbol{v}$即是各产品的真实总产值,有统一量纲,说明等级排序的合理性。非常有趣的是:若以厄米阵代

替$\boldsymbol{A}$,则其左、右特征向量的分量积等于右特征向量分量模的平方。这对应于量子力学中波函数的概率解释,导致闻名于世的“百年大战”。

4　产品分类(ProductRank)

基于$\boldsymbol{P}$的左特征向量$\boldsymbol{\mu}$所包含的完全信息,我们将其分量依大小为序,给出各个产品的等级序,并大体分为3类:拳头产品(支柱产业)、中间产品、弱势产品(瓶颈产业)。我们已将此法应用于2007、2012、2017年的国家级42种产品的分析,所得出的图像高度相似。中国每5年制作一个国家级投入产出表,所以3个表跨越15年[4]。由此看出方法的可靠性。

5　预测与调整及经济结构优化

与其他理论的主要区别在于:这个理论是可计算的,可程序化。在设置增速条件下,可算出可消费量;但后者需较强的稳定性,因此若所算出的消费量不足,就需要反过来降低增速。更深入的做法是优化经济结构。例如确定优化的目标产综$\tilde{\boldsymbol{u}}$,要找出以$\tilde{\boldsymbol{u}}$为最大左特征向量的新的结构矩阵$\tilde{\boldsymbol{A}}$。此时,所求的优化结构矩阵$\tilde{\boldsymbol{A}}$由下式给出:

$$\frac{\tilde{\boldsymbol{A}}}{\rho(\tilde{\boldsymbol{A}})} = \boldsymbol{D}^{-1}_{\tilde{\boldsymbol{u}}\odot\boldsymbol{u}^{-1}}\frac{\boldsymbol{A}}{\rho(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{u}}\odot\boldsymbol{u}^{-1}}$$

此处$\boldsymbol{u}^{\alpha}$为$\boldsymbol{u}$的各分量的α次幂所构成的向量。这一步我们两次用到转移概率矩阵。特别地,若取$\rho(\tilde{\boldsymbol{A}}) = \rho(\boldsymbol{A})$,则$\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{H}\odot\boldsymbol{A}$,此处$\odot$也表示分量积,其中$\boldsymbol{H} = (h_{ij}) = \left(\frac{u^{(i)}\tilde{u}^{(j)}}{\tilde{u}^{(i)}u^{(j)}}:i,j = 1,2,\cdots,d\right)$(与$\boldsymbol{u}$或$\tilde{\boldsymbol{u}}$是否归一化无关)。这样,$\tilde{a}_{ij} = a_{ij}h_{ij}$。视$h_{ij}>1$或$<1$,可以看出产能需要补充或过剩。

6　完全相同的稳定性

我们至今所用到的变换:$\boldsymbol{A}\rightarrow\tilde{\boldsymbol{A}}$均具有如下形式

$$\frac{\tilde{\boldsymbol{A}}}{\rho(\tilde{\boldsymbol{A}})} = \boldsymbol{D}^{-1}_{w}\frac{\boldsymbol{A}}{\rho(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{D}_{w}$$

式中,$\boldsymbol{w}$是任一给定的正向量。

对此,我们有如下结果。

转换定理　对于如上定义的$\tilde{\boldsymbol{A}}$的迭代解$\{\tilde{\boldsymbol{x}}_n\}_{n\geqslant 0}:\tilde{\boldsymbol{x}}_0 = \tilde{\boldsymbol{x}}_n\tilde{\boldsymbol{A}}^n$与关于$\boldsymbol{A}$的迭代解$\{\boldsymbol{x}_n\}_{n\geqslant 0}:\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_n\boldsymbol{A}^n$可通过恒等式$\rho(\tilde{\boldsymbol{A}})^n\tilde{\boldsymbol{x}}_n = \rho(\boldsymbol{A})^n\boldsymbol{x}_n\odot\boldsymbol{w},n\geqslant 0$,相互转换。特别地,对于每一个$n$和$k$,$\tilde{\boldsymbol{x}}_n$的第$k$个分量为非正(相应地,为负),当且仅当$\boldsymbol{x}_n$如此。

定理的末句表明:$\tilde{\boldsymbol{A}}$与$\boldsymbol{A}$有完全相同的稳定性。这样,为测试$\boldsymbol{A}$的稳定性,只需测试$\boldsymbol{P}$。

关于近年来的更多进展,见文献[2][3]及笔者主页(含视频):http://math0.bnu.edu.cn/~chenmf/

感谢陈彬、谢颖超、杨婷和周勤老师的协作和帮助。

参考文献(References)

[1] 华罗庚. 计划经济大范围最优化数学理论[M]. 北京: 中国财政经济出版社, 1987.
[2] 陈木法. 华罗庚经济最优化理论的新进展[J]. 应用概率统计, 2022, 38(2): 159-178.
[3] 陈彬, 陈木法, 谢颖超, 等. 经济系统的产品排序与结构优化[J]. 应用概率统计, 2022, 38(4): 475-504.
[4] 中国投入产出学会. 投入产出表 1990—2012[EB/OL]. [2023-02-14]. http://cioa.ruc.edu.cn/zlxz/trccb/36aeb21c821e46c38c7aa59d48bf1c87.htm.

New theory on L. K. Hua's economic optimization

Mu-Fa Chen[1,2]

1. Research Institute of Mathematical Science, Jiangsu Normal University, Xuzhou 221116, China
2. Key Laboratory of Mathematics and Complex Systems, Ministry of Education, School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Beijing 100875, China

Abstract We summarize Loo-Keng Hua's important update on economic optimization theory before his immortal death, which unfortunately fell asleep for 37 years and was not awakened until the end of 2021. Next, we introduce its subsequent progress, including one revision, one re-update, and five new developments: a new method for stability analysis; product (industry) level (ranking); prediction and adjustment; optimization of economic structure; efficient algorithms for reordering and large matrix principal eigenvalues (as well as the top 6 eigenvalues in major and minor order). It is rare that multiple transformations provide exactly the same unstable time and product. In the early years, the proof of the Hua's economic collapse theorem was based on the ergodic theorem of the Markov chain, and the recent results are all based on the transition probability matrix of the Markov chain, which may be seen as a new approach to economic optimization research. These achievements have been applied to one provincial-level and five national level input-output tables in China, testing the rationality and reliability of the theory.

Keywords economic optimization; stability analysis; productrank; prediction and adjustment; economic structural optimization; algorithm; Markov chain

（责任编辑　王丽娜）