

华氏经济优化新理论的实证案例*

杨婷 陈彬 周勤*

江苏师范大学数学研究院, 数学与统计学院, 徐州, 221116

摘要: 本文是我们研究小组在文献 [1,2] 中关于华罗庚经济最优化理论新探索的继续, 研究目前最新的 2017 年中国投入产出模型的稳定性分析、产品排序与分类、预测与调整和结构优化等问题; 并将 2007 年、2012 年、2017 年三个年度投入产出模型的产品排序与分类进行对比分析. 所得结果展示出三个年度、跨越 15 年的产品等级排序和分类的令人吃惊的相似性, 再次显示出前文理论的可靠性.

关键词: 投入产出法; 华罗庚经济优化理论; 拟对称化算法; 实证研究

中图分类号: F2; F224.9

英文引用格式: YANG T, CHEN B, ZHOU Q. Demonstrational examples based on the new theory of L. K. Hua's economic optimization [J]. Chinese J Appl Probab Statist, 2024, 40(4): 663–683. (in Chinese)

1 引言

众所周知, 经济是国之本、民之本. 政府工作报告中多次提出要促进数字经济发展, 数字经济对国民经济的引领带动日益凸显. 华罗庚先生是我国数字经济研究 (更严格地讲, 是数学经济研究) 的先驱, 侧重于严格的数学理论. 区别于已有的西方经济理论, 华先生的理论是可计算的、可程序化的. 他曾将他近三十年关于应用数学的研究概况为“一论、双法”, 其中“一论”就是经济优化理论. 华氏经济优化理论不光适用于“计划经济”, 同时也适用于“市场经济”.

相较于其他复杂系统而言, 经济学中所使用的数学还很有限. “投入产出法”是一种通过“投入产出表”反映国民经济行业间经济联系、投入与产出之间相互依存关系的经济数学分析方法. 1968 年联合国提倡将“投入产出法”作为分析国民经济最主要的工具. 投入产出调查是经国务院批准的, 每 5 年 (逢 2、7 年份) 开展的一项大型基础性调查. 通过调查, 可以了解和掌握国民经济行业以及产品的投入和产出结构数据, 是编制国家和地区投入产出表的重要依据. 2022 年 12 月 1 日国务院印发《关于开展第五次全国经济普查的通知》(2023 年至 2026 年), 提出第五次全国经济普查将首次统筹开展投入产出调查. 第五次全国

*国家自然科学基金项目 (批准号: 12090010, 12090011, 11671178), 江苏高校优势学科—统计学建设工程项目和江苏高校哲学社会科学研究项目 (批准号: 2022SJYB1160) 资助.

*通讯作者, E-mail: graceqinzhou@jsnu.edu.cn.

本文 2023 年 4 月 14 日收到, 2024 年 1 月 5 日收到修改稿.

经济普查和投入产出调查同时开展,是推进统计现代化改革的重要举措,可以有效减轻基层的整体负担,进一步优化调查项目,从而有效地衔接经济普查总量数据和投入产出调查的结构数据.

本文在文献 [1,2] 的基础上,经过对已有投入产出表的修正与调整,继续开展研究,创新点如下:一是对经济系统的稳定性分析,找到了测试参数 α 的比较合理的采样;二是基于文献 [1,2],研究 2017 年中国 149 部门和 42 部门模型的产品排序和稳定性分析;三是引入累积(概率)分布函数,解决产品的分类问题,更容易界定“拳头产品”和“弱势产品”;四是进一步研究产综与消费的预测和调整、结构优化等问题,为后续的研究工作提供了一个完整的典型案例;五是基于对 2017 年投入产出模型的分析,完成了对 2007 年、2012 年和 2017 年跨越 15 年的三个年度投入产出模型的综合分析.

利用文献 [1,2] 中的数学理论与算法,我们发现:通过对参数 α 的调整,经济系统的稳定性测试效果更好;随着产品部门数量的增加,经济系统的崩溃产品仍然集中在排序的尾部;通过对跨越 15 年的三个年度 42 部门经济模型的对比分析,三个年度的产品等级排序与分类结果也非常相似.这些都再次验证了前文理论的合理性与可靠性,也为以后的算法程序化提供了依据.

2 预备知识

投入产出法

本节的基本概念、结果与算法取自文献 [1,2]. 经济系统结构复杂,社会上各种产品是相互关联、相互制约地发生变化的,研究经济系统的变化就是研究产综的变化,产综即所关心的产品所构成的向量. 设 d 为经济系统中产品部门的数量,将所关心的产品构成的产综(固定单位: 吨, 吨, \dots 等) 记为 $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d)})$.

- 去年的投入产综记为 $x_0 = (x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \dots, x_0^{(d)})$;
- 今年的产出产综记为 $x_1 = (x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(d)})$;
- 结构方阵(消耗系数方阵) 记为 $A = (a_{ij} : i, j = 1, 2, \dots, d)$,

其中矩阵 A 反映了经济的本质属性,它的含义为: 每生产一个单位的 i 类产品,需要消耗 a_{ij} 个单位的 j 类产品. A 有三大要素: 最大正特征值 $\rho(A)$, 相应的(最大)左特征向量 u (行向量) 和(最大)右特征向量 v (列向量). 它们之间的关系为: $x_0 = x_1 A$. 一般地,对于时齐情形 (A 与时间无关), 有

$$x_0 = x_n A^n, \quad n \geq 1,$$

其中 x_n 表示第 n 年的产出产综,这就是著名的**华罗庚投入产出模型**,常假定 A 非负不可约^[1].
华氏经济优化理论要点

著名数学家华罗庚先生关于经济优化理论的主要贡献主要包括: 一是严格区分了生产

资料和消费资料,重构了经典投入产出法;二是在数学上严格证明了经济系统存在唯一可计算的平衡解,即结构方阵的最大左特征向量,此时最佳发展速度是对应最大特征值的倒数;三是指出了如果投入生产的产综各部门不按照最大左特征向量各分量的比例安排,经济必然走向失衡或者崩溃,即经济运行到某一年时,必定会出现负值产品。

有消费情形的投入产出模型

在实际社会生产中,消费必不可缺. 2021年底,陈木法^[1]修正了带消费情形的华氏经济模型的失误,作了更新与发展. 作为华先生基础数学工具的补充,他引进了随机数学工具;完成了产品的排序与分类、经济的预测与调整、经济结构的优化等研究,并成功应用于3份国家级、1份省级投入产出表,使得华氏理论真正走上实际,展现了人们期待已久的效用. 对于有消费情形的投入产出模型,只需要将结构方阵 A 换成随后的 A_α :

$$x_0 = x_n A_\alpha^n, \quad A_\alpha := (1 - \alpha)A + \alpha I, \quad (1)$$

其中 $\alpha \in (0, 1)$ 表示消费算参数, I 为单位矩阵. 确切地说, A_α 是无消费算子 A 与无增长算子 I 的凸组合. 与 A 一样, A_α 也非负且不可约. 显然,当 $\alpha = 0$ 时, $A_\alpha = A$.

应当指出,文献 [2] 中例 10 得到的消费倍数 $\gamma := \alpha(1 - \alpha)^{-1}$ 都大于 1, 说明了仅将增产部分用于消费是远远不够的,于是在接下来第 3 节中两个例子的稳定性测试中,我们将 α 的取值改为 $7/12, 2/3, 3/4, 4/5$ 和 $5/6$, 如此对应的 γ 分别为 1.4, 2, 3, 4, 5, 均大于 1, 更贴合实际. 当然,对 α 的采样具有一定的灵活性,可以随经济模型的变化进行调整.

以转移概率矩阵 P 替代 A

文献 [1] 从理论上给出了 A 与 P 之间的转换定理,并证明了使用 A 与 P 研究经济系统具有相同的稳定性. 如此,将经济系统的稳定性化归为马尔可夫链的稳定性来研究,将经济模型的优化理论的研究转化为随机数学(马尔可夫链)的研究,并给出了从原结构矩阵 A 构造出紧密相关的转移概率矩阵 P 的方法. 后者远比前者特殊,文献 [1] 中例 13 给出了对比:主要是迭代输出的增长速度,前者为指数式增长,当迭代次数多时,对于大矩阵可能算不下去;但对于后者,无此问题.

对于给定的非负、不可约矩阵 A , 定义转移概率矩阵 P 如下:

$$P = (p_{ij}), \quad p_{ij} = \frac{a_{ij}v_j}{v_i\rho(A)}, \quad i, j \in E \iff P = D_v^{-1} \frac{A}{\rho(A)} D_v, \quad (2)$$

其中 v 是 A 的最大特征值 $\rho(A)$ 所对应的右特征向量, $E = \{1, 2, \dots, d\}$, D_v 是以向量 v 作为对角向量的对角矩阵. 由定义, P 满足:

- (1) $P \geq 0$, $P\mathbf{1} = \mathbf{1}$, 即 P 的元素非负且各行和均为 1;
- (2) P 的最大特征值为 1, 对应的右、左特征向量分别是 $\mathbf{1}$ 和 $u \odot v$,

其中 $\mathbf{1}$ 是元素恒为 1 的列向量, \odot 表示由两个向量对应分量的乘积所构成的新向量, 也称

分量积. 令 $\mu := u \odot v$, 经归一化为 $\pi := u \odot v / (uv)$, 它即为 P 的平稳分布, 满足 $\pi = \pi P = \pi P^n$, $n \geq 1$. 在不可约条件下, π 是 P 的唯一平稳分布, 离开平稳分布, 经济系统就会出问题, 且 π 的分量的大小决定所对应的产品对经济系统所起的作用大小. 在经济学中, u 表示各产品的数量, v 表示各产品每个单位的真实价值 (常不同于市场价格), 那么 $u \odot v$ 即表示各产品的真实总产值, 有统一量纲, 使用其排序更具科学性. 相较于 A 和 u , 使用 P 和 μ 排序有两大优点:

- (1) μ 综合了 A 的三大特征 $(\rho(A), u, v)$, 而 u 仅用其中两个特征 $(\rho(A), u)$;
- (2) 使用 P 或 A 的稳定性完全重合, 但前者的振幅远小于后者.

于是, 相应于 A_α , 有消费情形的 P_α 更新为

$$P_\alpha := (1 - \beta)P + \beta I, \quad \text{相应地,} \quad \mu_0 = \mu_n P_\alpha^n, \quad (3)$$

其中 $\beta := \alpha / \rho(A_\alpha)$. 使用 P_α 与 A_α 有相同的稳定性 (参见文献 [1] 引理 11), 表示崩溃的时间和位置 (产品) 都一样, 但前者的振幅远小于后者, 且 P_α ($\alpha < 1$) 有相同的最大特征值 1, 及其左、右特征向量 $u \odot v$ 和 $\mathbf{1}$. 这也是本文研究的基石.

算法

经济系统是非常敏感的, 牵一发而动全身, 在研究经济系统稳定性的过程中, 要求特征向量有较高的精度, 我们将拟对称化技术 (详见文献 [1]§6) 应用于 A 的最大右特征向量 v 的计算:

- 第一拟对称化技术, 用于当矩阵元素振幅过大时, 抹平矩阵元素;
- 第二拟对称化技术, 用于当特征向量振动过大时, 拉直向量. 如此可以大大提高计算精度.

3 产品等级、分类与稳定性分析

本节我们使用结构方阵 A 所转化的转移概率矩阵 P 的最大左特征向量 $\mu := u \odot v$ 的排序来定义经济系统产品等级 (详见文献 [2]§3).

接下来如何定义产品的分类? 按照什么样的标准对产品进行分类? 这就需要引出累积 (概率) 分布函数的定义.

定义 1 将 P 的平稳分布 π (与 μ 等效) 的分量由小到大重新排序, 记为 p_1, p_2, \dots, p_d , 得到如下累积 (概率) 分布函数 $F(n)$:

$$F(0) = 0, \quad F(n) = \sum_{i=1}^n p_i, \quad F(d) = 1.$$

$F(n)$ 表示前 n 个的累积 (概率) 分布函数.

已知 $\pi = (\pi_k)$ 为 P 的唯一平稳分布, 对每一个 k , π_k 刻画了第 k 个产品对经济系统 A

的贡献. 自然可以将 $F(n)$ 的不同取值范围作为产品分类的标准. 在接下来的例 1 与例 2 中, 我们利用累积 (概率) 分布函数 $F(n)$ 来研究经济系统产品部门的分类问题. 将产品的贡献率按从小到大的顺序排列, $F(n)$ 表示前 n 个产品的累积贡献概率. 在统计学中, 一般会以 5% 为一个分界线, 如 5% 分位数. 这些产品的贡献比例和小于 5%, 我们认为是弱势产品 (瓶颈产业). 对于排序在后面的产品贡献率为 $1 - F(n)$. 若少数几个产品就能达到 50% 贡献率的话, 我们认为这几个产品是拳头产品 (支柱产业). 那剩余的产品我们定义为中间产品.

文献 [1,2] 对经济模型的产品排序与稳定性分析最多为 42 部门, 接下来我们研究产品部门数量更多的情形. 本节共分为三个小节.

3.1 2017 年中国 141 部门模型

例 1 (2017 年中国 141 部门投入产出表) 所述投入产出表来自于《2017 年中国投入产出表》(中国统计出版社) 的 149 部门投入产出表中的“基本流量表”和“直接消耗系数表”, 这两个表由国家统计局国民经济核算司编制. 因为此时对应的结构方阵可约, 我们无法直接使用该“直接消耗系数表”. 经部门合并, 我们得到了一个由 141 个产品部门所构成的新的 2017 年“基本流量表”, 经计算, 得到其对应的 2017 年 141 部门“直接消耗系数表”. 所关心的 141 个产品、等级序见附件 1 和附件 2.

已有投入产出表的修正

在《2017 年中国投入产出表》提供的 149 部门“基本流量表”中, 101 号产品“房屋建筑”, 102 号产品“土木工程建筑”, 103 号产品“建筑安装”, 142 号产品“社会工作”所在行的所有数据都是零; 132 号产品“研究和试验发展”, 146 号产品“体育”所在行的数据除主对角元素外, 全为零. 在华氏投入产出模型中, 要求结构方阵满足非负、不可约, 于是我们以 2012 年中国 139 部门与 42 部门的分类标准为参照, 将上述 6 个产品分别进行归类合并, 合并规则如下:

- (1) 将“房屋建筑”, “土木工程建筑”, “建筑安装”这三个产品与 104 号产品“建筑装饰、装修和其他建筑服务”合并为新产品“建筑”;
- (2) 将“研究和试验发展”与 133 号产品“专业技术服务”, 134 号产品“科技推广和应用服务”合并为新产品“科学研究和技术服务”;
- (3) 将“卫生”, “社会工作”合并为新产品“卫生与社会工作”;
- (4) 将“体育”与 145 号产品“文化艺术”, 147 号产品“娱乐”合并为新产品“文化艺术、体育和娱乐”.

A 的最大特征值 $\rho(A)$ 与右特征向量 v 的计算

结构方阵 A 是 2017 年 141 部门“直接消耗系数表”的转置, 我们需要通过计算 A 的最

大特征值 $\rho(A)$ 与右特征向量 v 得出对应的转移概率矩阵 P , 进而求解 P 的最大左特征向量 μ 来实现产品排序与稳定性分析. 为保证结果的可靠性, 需用拟对称化技术来提高计算的精度.

由于拟对称化技术对矩阵的零元素不起作用, 关心 A 的最小非零元素是 1.088122×10^{-11} , 最大元素是 0.655439 , 此处使用第一拟对称化技术的作用不大, 可省略该步骤. 我们使用幂法 (PI)、变动推移的反幂法 (IPI_v) 和固定推移的反幂法 (IPI_f) 求出 v 的近似值, 并计算 $\rho(A)$. 三种算法的用法的比较参见文献 [3].

(a) 首先使用幂法. 取初向量 $w_0 = \mathbb{1}$, 命 w_n 为方程

$$w_n = A v_{n-1}, \quad n \geq 1, \quad v_n = \frac{w_n}{\|w_n\|}, \quad n \geq 0$$

的解. 再命

$$x_n = \max_{1 \leq k \leq d} \frac{A v_n(k)}{v_n}, \quad y_n = \min_{1 \leq k \leq d} \frac{A v_n(k)}{v_n}, \quad \frac{A v}{v}(k) := \frac{A v(k)}{v(k)}. \quad (4)$$

经过 7 步迭代得出

$$\begin{aligned} \{x_n, y_n\}_{n=1}^7 : & \{0.766675582850145, 0.327971693772867\}, \\ & \{0.729552991414934, 0.514852042933830\}, \\ & \{0.703239695789427, 0.568071211007343\}, \\ & \{0.682147463101389, 0.581044757288386\}, \\ & \{0.667266104297533, 0.606574183455789\}, \\ & \{0.657445455401164, 0.621301070925294\}, \\ & \{0.651095506032724, 0.627320759416226\}. \end{aligned}$$

相对误差为

$$\begin{aligned} \{1 - y_n/x_n\}_{n=1}^7 : & 0.572215809255826, 0.294291094694440, 0.192208269230805, \\ & 0.148212389962339, 0.090956097501217, 0.054977008630800, \\ & 0.036514991112997, \end{aligned}$$

再往下迭代的收敛速度会很慢.

(b) 使用变动推移的反幂法加快速度. 我们将文献 [1] 引理 16 应用于 w 等于 (a) 中的 v_7 , 得到 \bar{A} . 取初始推移为 $z_0 = x_7$, $w_0 = \mathbb{1}$, 命 w_n 为方程

$$(z_0 I - \bar{A}) w_n = v_{n-1}, \quad n \geq 1, \quad v_n = \frac{w_n}{\|w_n\|}, \quad n \geq 0$$

的解. 再重新定义 x_n 和 y_n , 只需将式 (4) 中的 A 用 \bar{A} 代替. 经过 2 步迭代, 得出

$$\begin{aligned} \{x_n, y_n\}_{n=1}^2 : & \{0.638907400054850, 0.637471762798212\}, \\ & \{0.638131109398827, 0.638125282403389\}. \end{aligned}$$

相对误差为

$$\{1 - y_n/x_n\}_{n=1}^2 : 0.002247019296560, \quad 9.131345192092688 \times 10^{-6}.$$

(c) 改用收敛速度慢一些但更安全的**固定推移的反幂法**加细计算结果. 经过3次迭代, 得出

$$\begin{aligned} \{x_n, y_n\}_{n=1}^3 : & \{0.638127894834197, \quad 0.638127894731111\}, \\ & \{0.638127894777023, \quad 0.638127894777021\}, \\ & \{0.638127894777022, \quad 0.638127894777021\}. \end{aligned}$$

相对误差

$$\begin{aligned} \{1 - y_n/x_n\}_{n=1}^3 : & 1.615433342649908 \times 10^{-10}, \quad 3.774758283725532 \times 10^{-15}, \\ & 1.776356839400251 \times 10^{-15}. \end{aligned}$$

此时相对误差仅有 10^{-15} 阶, 再往下迭代, 结果会溢出. 对应的 v_3 近乎为一个常值向量, 即为 \bar{A} 的最大右特征向量的近似解.

改写 (c) 步中的 v_3 为 \tilde{v}_3 , 记 A 的最大右特征向量为 v , 则

$$v = D_{v_7} \tilde{v}_3 = v_7 \odot \tilde{v}_3, \quad \rho(A) = \rho(\bar{A}) = 2^{-1}(x_3 + y_3) = 0.638127894777022.$$

对比 $Av - \rho(A)v$ 的最大主阶, 软件缺省的输出为 10^{-16} , 此时提高到了 10^{-18} . 根据式 (2) 可以算出 A 对应的转移概率矩阵 P . 特别指出, 从计算的角度看, 式 (2) 的前者为针对逐个元素计算 P , 降低了计算的复杂性, 误差比后者更小. 对比 A, \bar{A}, P 的最大右特征向量的近似解的振幅 (使用 $\max v / \min v$), 依次得到

$$m_v(A) = 24.998499151026344, \quad m_v(\bar{A}) = 1.126215405603782, \quad m_v(P) = 1.$$

可以看出, 第二拟对称化技术对拉平特征向量的效果非常显著, 且 A, \bar{A}, P 三者有相同的不可约性和稳定性.

接下来我们继续提高 P 的最大左特征向量的精度, 使用**固定推移的反幂法**再做一次精细化. 套用方程

$$w_n(z_0 I - P) = \mu_{n-1}, \quad n \geq 1, \quad \mu_n = \frac{w_n}{\|w_n\|}, \quad n \geq 0,$$

其中 $z_0 = 1 + 10^{-7}$, $w_0 = \mathbf{1}$. 经2步迭代后得到了 P 的最大左特征向量的最优近似, 记为 $\tilde{\mu}$. 经试验, $\tilde{\mu}P - \tilde{\mu}$ 的最大主阶由软件缺省输出的 10^{-16} 提高到了 10^{-17} , 已经得到了期望的精度. 接下来关于 $\tilde{\mu}$ 的最小分量 (第119个) 归一化, 得到 μ (见附件3).

稳定性测试

由于本例的产品部门数量比较多, 这里给出关于 μ 的四种不同取法 $\{\mu_0^{(j)}\}_{j=1}^4$: 分别表示 μ 取小数点后2, 3, 4, 5位近似而得到的值. 对于不同的参数 α , 由式 (3) 算出经济系统的崩溃时间与崩溃位置, 稳定性测试结果如表1所示.

表 1 2017 年中国 141 部门模型的稳定性测试

T_{μ_0}	α				
	$\frac{7}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$
$\mu_0^{(1)}$	19 (140)	25 (140)	36 (140)	47 (140)	58 (140)
$\mu_0^{(2)}$	24 (139)	33 (139)	46 (139)	60 (139)	74 (139)
$\mu_0^{(3)}$	35 (102) (84)	47 (102)	68 (102)	88 (102)	109 (102)
$\mu_0^{(4)}$	38 (140) (139)	51 (140)	73 (140)	95 (140)	117 (140)

表中不带圈的第一个数字表示 $T_{\mu_0} = T_{\mu_0}^+$, 分别为经济系统失衡时与崩溃时 (文献 [1] 推论 12), 带圈的数字表示崩溃位置 (崩溃产品). 简单来说, 失衡时与崩溃时就是经济运行中首次出现非正和负分量的时间 n , 崩溃产品就是经济运行中首次出现负分量所对应的产品. 以下同.

产品分类

我们尝试以 0.05 和 0.5 为阈值, 利用累积 (概率) 分布函数 $F(n)$ 研究 2017 年中国 141 部门的产品分类:

- 拳头产品: $F(n) \geq 0.5$, 对应 14 个产品, 产品等级序为 1-14;
- 弱势产品: $F(n) \leq 0.05$, 对应 57 个产品, 产品等级序为 85-141;
- 中间产品: 其他情形对应的产品.

由此, 得到对应的累积 (概率) 分布函数图 (见图 1). 图 2 是 2017 年中国 141 部门模型 P 的最大左特征向量 μ 的图示, 其中横坐标表示产品序号, 纵坐标表示 P 的最大左特征向量 μ 的分量的常数倍 (用 $1000 \mu_i / \sum_{i=1}^{141} \mu_i$ 表示).

图 2 的左上方列出的 4 个产品 (此处标注的是产品号) 对应着表 1 中列出的崩溃位置:

- A: 排名 140 的 140 号产品“社会保障”;
- B: 排名 139 的 108 号产品“水上旅客运输”;
- C: 排名 102 的 4 号产品“渔产品”;
- D: 排名 84 的 12 号产品“谷物磨制品”.

结合图 1, 图 2 与表 1 可知, 排名 140, 139, 102 的产品都属于“弱势产品”, 而排名 84 的产品, 虽然属于“中间产品”, 但处于局部极小值点处 (图 2 与图 3 中的 D 点), 且与“弱势产品”的差距非常小. 再一次验证了经济系统中的崩溃产品大多集中在排序靠后的尾部.

接下来我们研究“中间产品”的分类问题. 尝试以 0.1 和 0.2 为阈值将 70 个“中间产品”按照以下标准再分为三类:

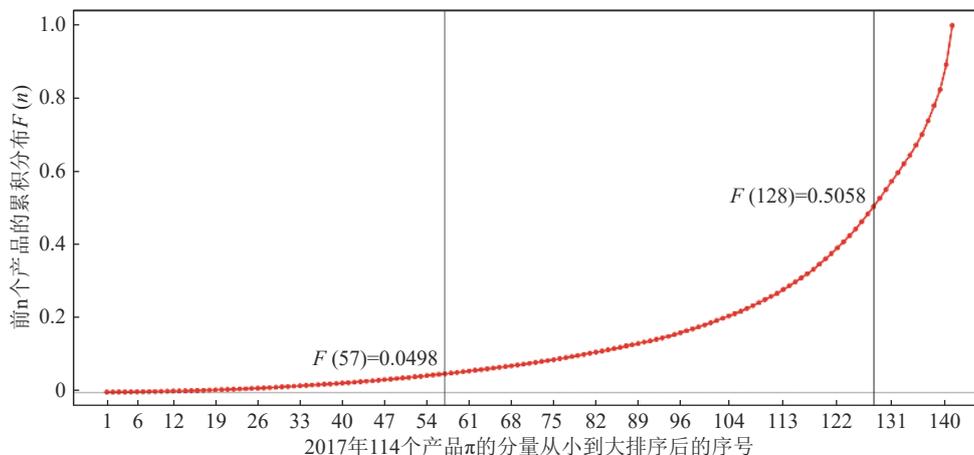


图 1 2017 年中国 141 部门模型的累积 (概率) 分布函数图

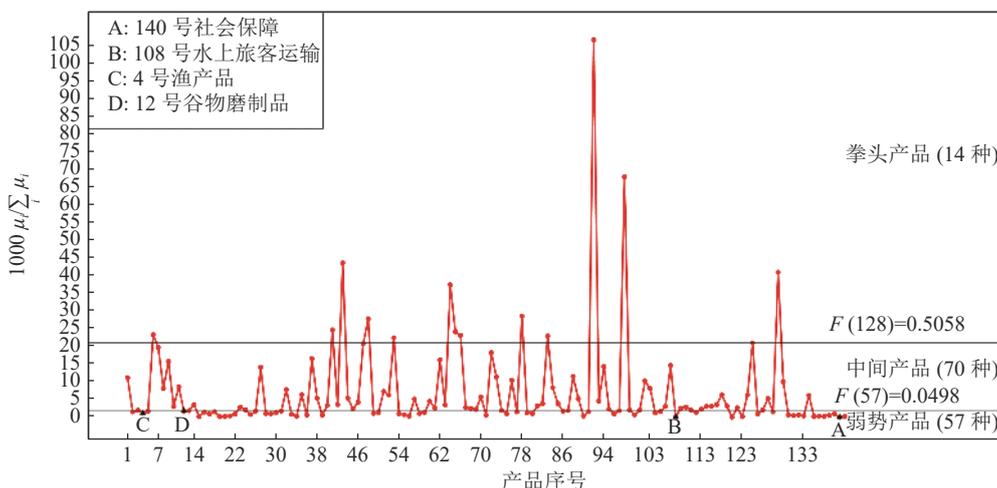


图 2 2017 年中国 141 部门模型的 μ 的图

- 当 $0.05 < F(n) \leq 0.1$ 时, $58 \leq n \leq 79$ 时, 对应 22 个产品;
- 当 $0.1 < F(n) < 0.2$ 时, $80 \leq n \leq 102$ 时, 对应 23 个产品;
- 当 $0.2 \leq F(n) < 0.5$ 时, $103 \leq n \leq 127$ 时, 对应 25 个产品.

于是得到 2017 年中国 141 部门模型 P 的最大左特征向量 μ 的局部图示 (见图 3).

图 3 显示, “中间产品”的三个分类对应的 μ 值差距较大, 且多数集中在偏小区域, 尤其“中间产品”的“最小类”与整体的“弱势产品”差距甚小.

3.2 2017 年中国 42 部门模型

例 2 (2017 年中国 42 部门投入产出表) 《2017 年中国投入产出表》(中国统计出版社) 已有 2017 年 42 部门“直接消耗系数表”, 但此表对应的结构方阵可约, 所以我们将 2017 年 149 部门投入产出表中的“基本流量表”进行部门合并, 得到了一个新的 2017 年

42 部门“基本流量表”，计算得出其对应的 2017 年 42 部门“直接消耗系数表”。所关心的 42 个产品、等级序见表 3。

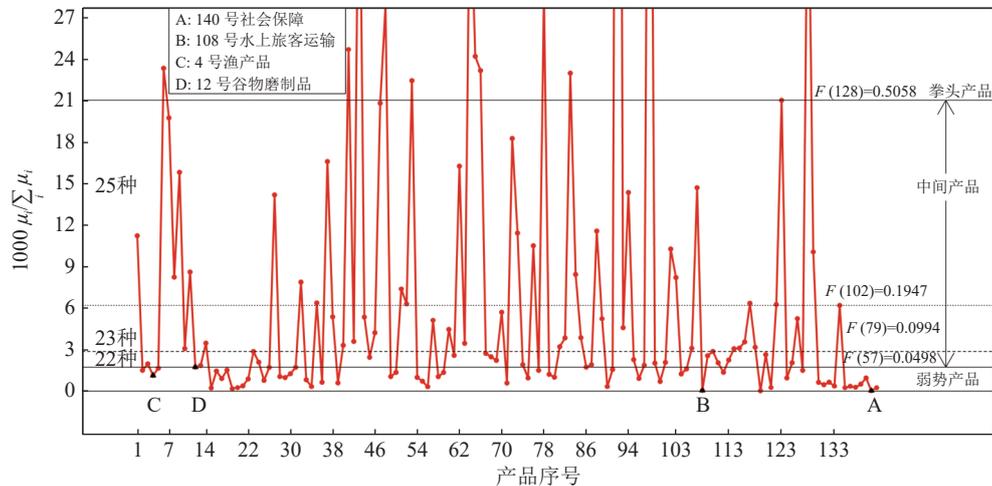


图 3 2017 年中国 141 部门模型的 μ 的局部图

已有投入产出表的修正

在《2017 年中国投入产出表》提供的 42 部门“基本流量表”中，35 号产品“研究和试验发展”所在行的数据除了主对角元素是非零数值，其他均为零，结构方阵不满足不可约性。通过与 2012 年中国 42 部门对比（见文献 [2] 表 8），可以发现 2017 年的 22 号产品“其他制造产品及废品废料”在 2012 年被拆分成了“其他制造产品”与“废品废料”两个产品；2017 年的 35 号产品“研究和试验发展”和 36 号产品“综合技术服务”在 2012 年被合并成了一个产品“科学研究和技术服务”。为了能和 2012 年 42 部门的投入产出表进行对比，我们以 2012 年中国 42 部门的分类标准为参照，得到新的 2017 年 42 部门投入产出表。

A 的最大特征值 $\rho(A)$ 与右特征向量 v 的计算

与例 1 类似，结构方阵 A 是新的 2017 年的 42 部门“直接消耗系数表”的转置。经过 7 步幂法，2 步变动推移的反幂法，4 步固定推移的反幂法，得到 $\rho(A) = 0.641562799876367$ ， A 的最大右特征向量 $v = v_7 \odot \tilde{v}_4$ （其中 \tilde{v}_4 为经过 4 步固定推移的反幂法得到的 v_4 ），此时 $Av - \rho(A)v$ 的最大主阶为 10^{-17} 。对相应的转移概率矩阵 P ，经 2 步固定推移的反幂法，得到 P 的最大左特征向量的最优近似 $\tilde{\mu}$ ， $\tilde{\mu}P - \tilde{\mu}$ 的最大主阶为 10^{-16} 。再关于其最小分量（第 39 个）归一化，可得精度较高的 μ （见附件 4）。

稳定性测试

给出关于 μ 的五种不同取法 $\{\mu^{(j)}\}_{j=1}^5$ ：前四种取法分别表示 μ 取小数点后 2, 3, 4,

5位近似,第五种取法为取小数点后2位、有效位数不少于4位的近似.稳定性测试结果如表2所示(令人吃惊,25个测试的崩溃位置全部处于(40)):

表2 2017年中国42部门模型的稳定性测试

T_{μ_0}	α				
	$\frac{7}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$
$\mu_0^{(1)}$	18 (40)	24 (40)	35 (40)	45 (40)	55 (40)
$\mu_0^{(2)}$	23 (40)	31 (40)	44 (40)	57 (40)	70 (40)
$\mu_0^{(3)}$	30 (40)	41 (40)	58 (40)	76 (40)	93 (40)
$\mu_0^{(4)}$	38 (40)	51 (40)	73 (40)	95 (40)	117 (40)
$\mu_0^{(5)}$	22 (40)	30 (40)	43 (40)	55 (40)	68 (40)

$$T_{\mu_0} = T_{\mu_0}^+$$

产品分类

以0.05和0.5为阈值,利用累积(概率)分布函数 $F(n)$ 研究2017年中国42部门的产品分类:

- 拳头产品: $F(n) \geq 0.5$, 对应6个产品, 产品等级序为1-6;
- 弱势产品: $F(n) \leq 0.05$, 对应16个产品, 产品等级序为27-42;
- 中间产品: 其他情形对应的产品.

对应的累积(概率)分布函数图见图5中的红色曲线. 结合表2可知, 崩溃产品(等级序40)属于“弱势产品”.

3.3 2017, 2012和2007年中国42部门模型对比分析

表3共由5列构成, 第一列为产品序号, 第二列为产品名称(与2012年中国42部门产品一致), 第三、四、五列分别是由 P 得出的2017年, 2012年和2007年中国42部门产品等级序. 2017年的等级序是本文例3中 μ 的排序, 2012年的等级序来自文献[2]表8, 2007年的等级序需要特别说明: 对照2012年中国42部门产品名称, 我们发现2007年42部门的名称与2012年的不一致, 于是对2007年中国135部门“基本流量表”中的产品部门重新组合, 得到了2007年41个部门的“直接消耗系数表”, 从而计算得到2007年 P 的 μ . 与2012年42部门产品对比, 缺少24号产品“金属制品、机械和设备修理服务”的数据, 我们用2017年与2012年该产品对应的 P 的 μ 的平均值进行插补, 由此得到的2007年的产品等级序才能与2012年42部门产品等级序有可比性.

我们给出2017, 2012和2007年42部门模型 P 的 μ 的图示(见图4), 其中横坐标表示产品序号, 纵坐标表示 P 的最大左特征向量 μ 的分量的常数倍(用 $42 \mu_i / \sum_{i=1}^{42} \mu_i$ 表示).

表 3 2017, 2012, 2007 年中国 42 部门模型产品排序

产品序	产品名称	2017 年	2012 年	2007 年
1	农林牧渔产品和服务	13	18	19
2	煤炭采选产品	18	9	13
3	石油和天然气开采产品	21	12	9
4	金属矿采选产品	19	10	11
5	非金属矿和其他矿采选产品	28	25	30
6	食品和烟草	10	15	18
7	纺织品	17	17	15
8	纺织服装鞋帽皮革羽绒及其制品	27	29	24
9	木材加工品和家具	29	26	25
10	造纸印刷和文教体育用品	11	16	14
11	石油、炼焦产品和核燃料加工品	14	5	7
12	化学产品	2	1	1
13	非金属矿物制品	23	21	21
14	金属冶炼和压延加工品	3	2	2
15	金属制品	15	14	10
16	通用设备	9	7	5
17	专用设备	16	20	16
18	交通运输设备	7	13	8
19	电气机械和器材	5	6	6
20	通信设备、计算机和其他电子设备	1	3	3
21	仪器仪表	22	24	17
22	其他制造产品	32	34	31
23	废品废料	38	32	35
24	金属制品、机械和设备修理服务	37	35	34
25	电力、热力的生产和供应	4	4	4
26	燃气生产和供应	33	38	36
27	水的生产和供应	39	39	38
28	建筑	34	30	37
29	批发和零售	20	23	22
30	交通运输、仓储和邮政	8	8	12
31	住宿和餐饮	25	28	26
32	信息传输、软件和信息技术服务	24	27	29
33	金融	12	19	23
34	房地产	31	33	39
35	租赁和商务服务	6	11	20
36	科学研究和技术服务	26	22	27
37	水利、环境和公共设施管理	36	37	40
38	居民服务、修理和其他服务	30	31	28
39	教育	42	42	41
40	卫生和社会工作	40	41	32
41	文化、体育和娱乐	35	36	33
42	公共管理、社会保障和社会组织	41	40	42

红线、蓝线与黑线分别代表 2017 年, 2012 年与 2007 年 (图 5 同). 从图 4 可以看出, 跨越 15 年的三个年度的产品等级序非常相似, 同时可以直观感受各个产品部门的纵向动态变

化趋势.

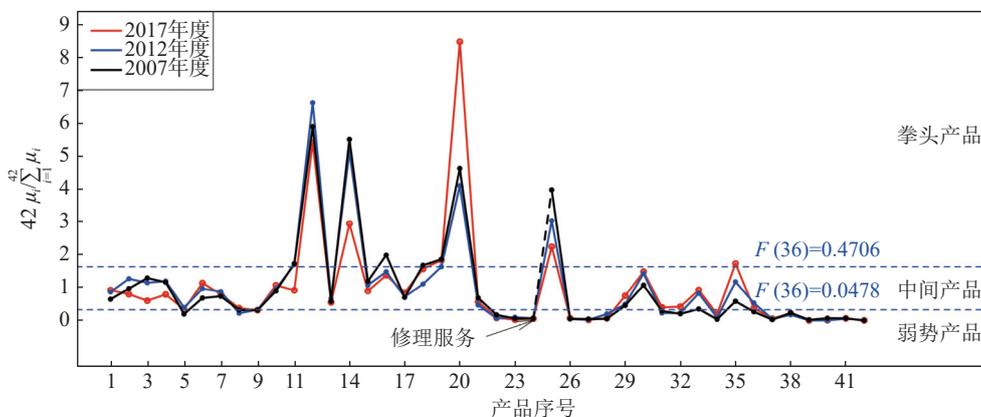


图 4 2017, 2012, 2007 年中国 42 部门模型的 μ 的图

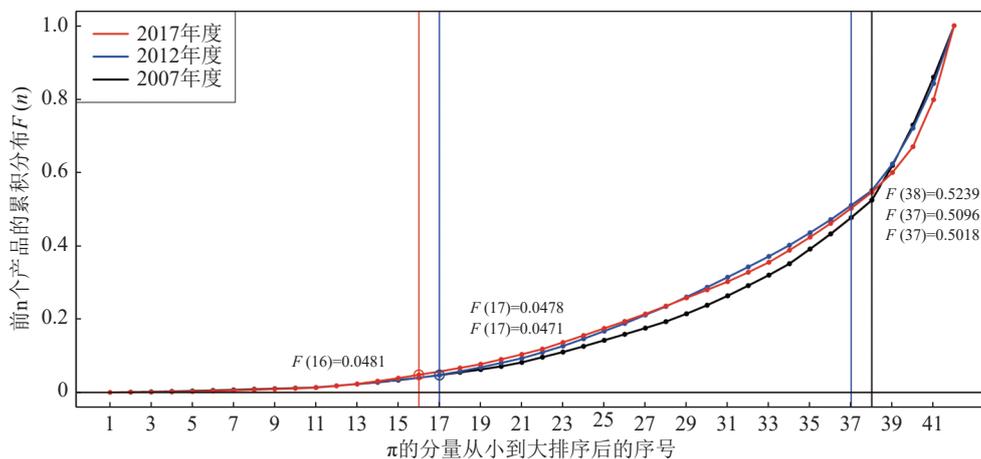


图 5 2017, 2012, 2007 年中国 42 部门模型的累积 (概率) 分布函数图

图 5 表明, 三个年度 42 部门累积 (概率) 分布函数图也非常一致. 考虑对“拳头产品”的分类, 2007 年的 $F(38)$ 与 2012 年的 $F(37)$ 相差仅有 0.014, 与 2017 年的 $F(37)$ 相差仅有 0.022; 对“弱势产品”的分类, 2017 年的 $F(16)$ 与 2007 年的 $F(17)$ 相差仅有千分之一, 与 2012 年的 $F(17)$ 相差仅有万分之三. 应该说明的是, 三个年度总共跨越了 15 年, 社会生产不断发展与进步, 上述误差属于正常范围. 如此, 我们可以将三个年度的 42 个产品统一划分为 6 个“拳头产品”(所占比重均接近一半) 和 17 个“弱势产品”. 经对比, 三个年度 6 个“拳头产品”中有 5 个重合, 17 个“弱势产品”中有 13 个在三个年度中重合, 6 个在两个年度中重合.

4 经济增长速度的预测与调整

文献 [1] 中推论 8 已经给出了经济增长速度与可用消费量之间的关系:

$$\xi_n = \frac{1 - (1 + \delta)\rho(A)}{\delta}(x_{n+1} - x_n),$$

其中 ξ_n 为第 $n + 1$ 年的可用消费量, δ 为经济增长速度, x_n 满足递推方程

$$x_n = x_{n+1}A_\alpha = x_{n+1}[(1 - \alpha)A + \alpha I].$$

由文献 [1] 中式 (14) 可知, $[1 - (1 + \delta)\rho(A)]/\delta$ 即为消费倍数 $\gamma := \alpha/1 - \alpha$, $\gamma \in (0, \infty)$. 如此, 经济最大增长速度 δ 可由第 $n + 1$ 年的最大可用消费量 ξ_n 决定.

例 3 (2017 年中国 141 部门模型消费量的计算) 以例 1 的 2017 年中国 141 部门投入产出表为例, 由于产品部门较多, 此例我们选取差距较大的排名前 14 位的“拳头产品”作为研究对象. 根据全国人大公布的经济增速目标, 可合理假设经济增长速度的 6 种不同取值: 5.5%、7%、8%、9%、10%、12%. 令 δ_i 表示经济增长速度的第 i 种取值; γ_i 表示相应于 δ_i 的消费倍数; $x_{1,i}$ 表示相应于 δ_i 的第一年的产综; $\xi_{0,i}$ 表示相应于 δ_i 的第一年的可用消费量. 已知 $\rho(A) = 0.638127894777022$, 对应结果如下:

表 4 说明, 随着经济增长速度的增加, 消费倍数呈下降趋势, 符合经济发展规律.

表 4 相应于增速 δ 的消费倍数 γ

i	1	2	3	4	5	6
δ_i	5.5%	7%	8%	9%	10%	12%
γ_i	5.94	4.53	3.89	3.38	2.98	2.38

表 5 仅列出 $\delta = 5.5\%$, 8% , 12% 时对应的第一年产综与可用消费量的结果. 第一列 $p(q)$ 中的 p 表示等级序, q 表示产品序. 为了更直观地比较不同经济增长速度下二者的变化趋势, 我们给出对应图像 (见图 6), 其中横坐标表示按照等级从高到低排序后的 14 个“拳头产品”的产品序号, 纵坐标分别用第一年产综与可用消费量的 100 倍表示, 黑色实线、红色虚线与蓝色实线分别代表 δ 取 5.5%、8%、12% 的情形 (图 7 同).

从表 5 和图 6 可以看出: 经济增长速度与产综呈正相关, 与消费量呈负相关, 与当年的消费量和产综的比值呈负相关. 若要提高经济发展速度, 必须降低消费量. 而表 4 的消费倍数都大于 1, 表明仅将增产部分用于消费是不够的, 经济的增长很大程度上需要刺激消费, 才能拉动内需, 促进经济增长.

例 4 (2017 年中国 42 部门模型消费量的计算) 与例 3 方法类似, 以例 2 的 2017 年中国 42 部门 6 个“拳头产品”为研究对象, $\rho(A) = 0.641562799876367$. 对应结果如下:

表 6 显示的经济发展规律与表 4 一致. 表 7 对应的图像见图 7, 其中横坐标表示按照等级排序后的 6 个“拳头产品”的序号, 纵坐标分别用第一年产综与可用消费量的 100 倍表示.

值得强调的是: 今年的政府工作报告建议将 2023 年中国经济增速目标设定为 5% 左右, 当经济增长速度取 5% 时的结果如下:

- (1) 对于 2017 年 141 部门, $\alpha = 0.868409$, $\gamma = 6.599314$;
- (2) 对于 2017 年 42 部门, $\alpha = 0.867148$, $\gamma = 6.527181$.

表 5 第一年产综 $x_{1,i}$ 与可用消费量 $\xi_{0,i}$

$p(q)$	$x_{1,1}$	$\xi_{0,1}$	$x_{1,3}$	$\xi_{0,3}$	$x_{1,6}$	$\xi_{0,6}$
1(92)	0.339128	0.105041	0.347164	0.099913	0.360022	0.091708
2(98)	0.453254	0.140390	0.463994	0.133537	0.481179	0.122570
3(43)	0.262108	0.081185	0.268319	0.077222	0.278256	0.070880
4(128)	0.273822	0.084813	0.280310	0.080673	0.290692	0.074048
5(64)	0.237704	0.073626	0.243337	0.070032	0.252349	0.064281
6(78)	0.123169	0.038150	0.126088	0.036288	0.130758	0.033308
7(48)	0.155297	0.048102	0.158977	0.045753	0.164865	0.041996
8(41)	0.225335	0.069795	0.230675	0.066388	0.239219	0.060936
9(65)	0.123586	0.038279	0.126514	0.036411	0.131200	0.033420
10(6)	0.238133	0.073759	0.243776	0.070158	0.252804	0.064397
11(66)	0.132409	0.041012	0.135547	0.039010	0.140567	0.035807
12(83)	0.091450	0.028326	0.093617	0.026943	0.097084	0.024730
13(53)	0.108618	0.033643	0.111192	0.032001	0.115310	0.029373
14(123)	0.298080	0.092327	0.305144	0.087820	0.316446	0.080608

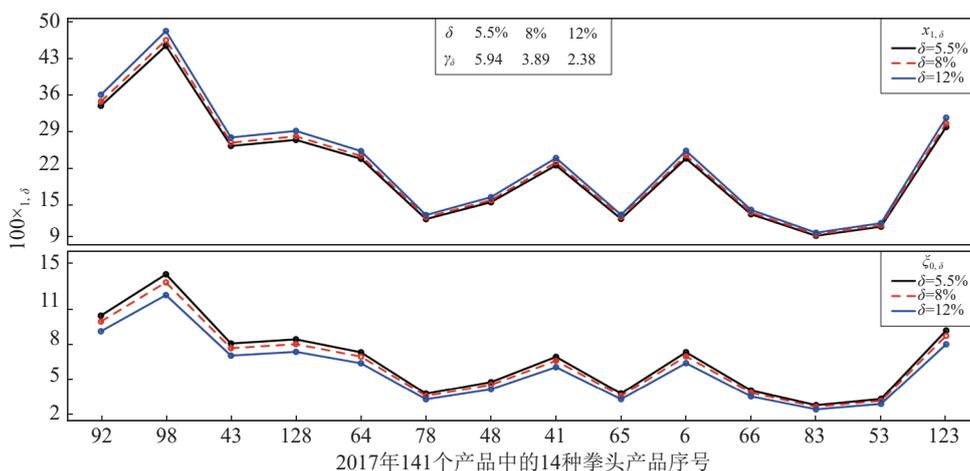


图 6 2017 年中国 141 部门 14 个“拳头产品”的第一年产综和可用消费量的图

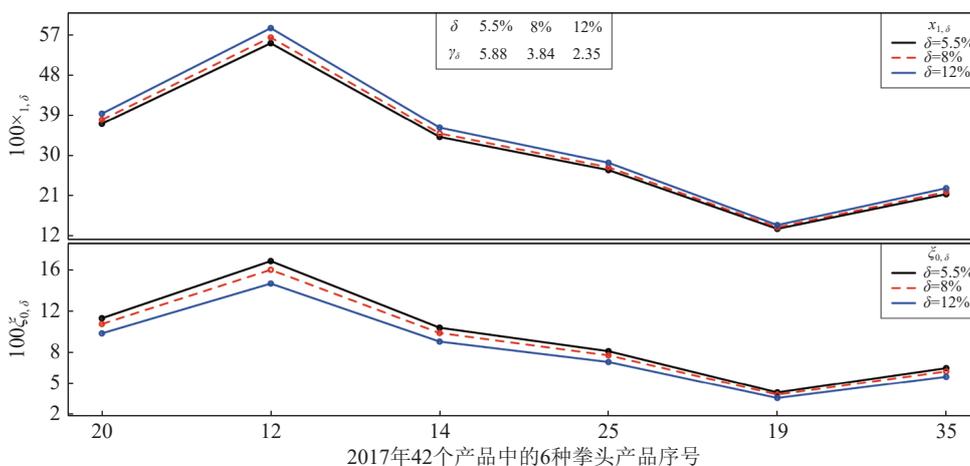


图 7 2017 年中国 42 部门 6 个“拳头产品”的第一年产综和可用消费量的图

表 6 相应于增速 δ 的消费倍数 γ

i	1	2	3	4	5	6
δ_i	5.5%	7%	8%	9%	10%	12%
γ_i	5.88	4.48	3.84	3.34	2.94	2.35

表 7 第一年产综 $x_{1,i}$ 与可用消费量 $\xi_{0,i}$

$p(q)$	$x_{1,1}$	$\xi_{0,1}$	$x_{1,3}$	$\xi_{0,3}$	$x_{1,6}$	$\xi_{0,6}$
1(20)	0.369961	0.113321	0.378727	0.107696	0.392754	0.098697
2(12)	0.550260	0.168547	0.563299	0.160181	0.584162	0.146797
3(14)	0.340185	0.104200	0.348247	0.099029	0.361145	0.090754
4(25)	0.266107	0.081510	0.272412	0.077464	0.282502	0.070991
5(19)	0.134864	0.041310	0.138060	0.039259	0.143173	0.035979
6(35)	0.212318	0.065034	0.217349	0.061806	0.225399	0.056642

两种情况下都不影响经济系统的稳定性; 对应的崩溃时间比其他情形会延长, 但不影响崩溃产品的位置.

5 经济结构的优化

经济系统稳定性最重要的量是结构方阵 A 的最大左特征向量 u , 我们自然选取产综 \tilde{u} 作为优化目标, 构造出以 \tilde{u} 为最大左特征向量的结构方阵 \tilde{A} , 实现经济结构的优化. 下面是依照陈木法先生在演讲中所提供的 (见文献 [2] 定理 12) 的简化证明. 首先, 对比文献 [2] 引理 11 的右特征向量的情形, 我们引进它的对偶变换引理.

引理 2 给定非负不可约矩阵 A 和正向量 w , 命

$$Q_w = D_w \frac{A}{\rho(A)} D_w^{-1},$$

D_w 是以向量 w 作为对角向量的对角矩阵. Q_w 的转置为转移概率矩阵当且仅当 w 为 A 相应于最大特征值 $\rho(A)$ 的左特征向量 u .

证明: 不妨设 $\rho(A) = 1$, 则

$$\mathbb{1}^* Q_w = \mathbb{1}^* D_w A D_w^{-1} = w A D_w^{-1} \stackrel{?}{=} \mathbb{1}^* \iff w A = \mathbb{1}^* D_w = w,$$

其中 $\mathbb{1}^*$ 为 $\mathbb{1}$ 的转置. 显然, 右方断言成立当且仅当 w 为 A 相应于最大特征值 $\rho(A)$ 的左特征向量 u . \square

事实上, 当 v 为 A 相应于最大特征值 $\rho(A)$ 的右特征向量时,

$$P = D_v^{-1} \frac{A}{\rho(A)} D_v, \quad P \mathbb{1} = \mathbb{1}.$$

P 的最大特征值及其对应的右、左特征向量分别为 $1, \mathbb{1}, u \odot v$. 自然地, 根据对偶变换,

当 u 为 A 相应于最大特征值 $\rho(A)$ 的左特征向量时,

$$Q = D_u \frac{A}{\rho(A)} D_u^{-1}, \quad \mathbf{1}^* Q = \mathbf{1}^*.$$

Q 的最大特征值及其对应的右、左特征向量分别为 $\mathbf{1}$, $u \odot v$, $\mathbf{1}^*$.

文献 [2] 中定理 12 的简化证明: 由引理 2 得到

$$\tilde{Q}_{\tilde{u}} = D_{\tilde{u}} \frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} D_{\tilde{u}}^{-1}.$$

对于给定的 \tilde{u} , 显然 $\tilde{A}/\rho(\tilde{A})$ 与 $\tilde{Q}_{\tilde{u}}$ 相互唯一确定. 同理, $A/\rho(A)$ 与 Q_u 相互唯一确定:

$$Q_u = D_u \frac{A}{\rho(A)} D_u^{-1}.$$

为构造 $\tilde{A}/\rho(\tilde{A})$, 我们希望从 $A/\rho(A)$ 提取尽可能多的信息, 所以自然取 $Q_u = \tilde{Q}_{\tilde{u}}$. 此时, 我们有

$$\frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} = D_{\tilde{u}}^{-1} \tilde{Q}_{\tilde{u}} D_{\tilde{u}} = D_{\tilde{u}}^{-1} D_u \frac{A}{\rho(A)} D_u^{-1} D_{\tilde{u}} = D_{\tilde{u} \odot u^{-1}}^{-1} \frac{A}{\rho(A)} D_{\tilde{u} \odot u^{-1}},$$

即

$$\frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} = D_w^{-1} \frac{A}{\rho(A)} D_w, \quad w := \tilde{u} \odot u^{-1}. \quad (5)$$

证明完毕. \square

由式 (5) 左侧的不变性, 可通过 $\kappa \tilde{A}$ ($\kappa > 0$) 进一步优化. 由 [2] 中定理 13 可知, A , \tilde{A} , $\kappa \tilde{A}$ 具有相同的稳定性, 即经济系统失衡或崩溃的时间和产品都相同. 类似地, 对于带消费情形, 有

$$\frac{\tilde{A}_\alpha}{\rho(\tilde{A}_\alpha)} = D_w^{-1} \frac{A_\alpha}{\rho(A_\alpha)} D_w, \quad w := \tilde{u} \odot u^{-1}. \quad (6)$$

A_α , \tilde{A}_α , $\kappa \tilde{A}_\alpha$ 也具有相同的稳定性.

特别地, 取 $\rho(A) = \rho(\tilde{A})$ 时,

$$\tilde{A} = A \odot H = (a_{ij} h_{ij}), \quad H = \left(\frac{w_j}{w_i} = \frac{u_i \tilde{u}_j}{\tilde{u}_i u_j} : i, j = 1, 2, \dots, d \right).$$

当 $h_{ij} > 1$ 时, 表明产品需要增加投入; 当 $h_{ij} < 1$ 时, 表明产品产能过剩.

经济系统非常敏感, 核心是“平衡”. 我们希望通过选取参数 κ 的最优解, 使得在 $\kappa \tilde{A}$ 与 A 的误差尽可能小的前提下 (保证经济系统的稳定性), 对经济结构进行优化与调整. 可分别从 ℓ^2 距离和 ℓ^∞ 距离考虑 $\kappa \tilde{A}$ 与 A 的差距.

(1) ℓ^2 距离

$$\|\kappa\tilde{A} - A\|_F^2 = \sum_{i,j} |\kappa\tilde{a}_{ij} - a_{ij}|^2.$$

当且仅当 $\kappa = \frac{\langle \tilde{A}, A \rangle}{\|\tilde{A}\|_F^2} := \bar{\kappa}$ 时, $\|\kappa\tilde{A} - A\|_F^2$ 取最小值, 此时 $\bar{\kappa}$ 为经济系统的最优解.

(2) ℓ^∞ 距离

$$\|\kappa\tilde{A} - A\|_\infty = \sup_{i,j} |\kappa\tilde{a}_{ij} - a_{ij}|.$$

记 κ^* 为使 $\|\kappa\tilde{A} - A\|_\infty$ 取最小值的经济系统的最优解, $\kappa^* \in (\min_{i,j} \frac{w_i}{w_j}, \max_{i,j} \frac{w_i}{w_j})$.

例 5 (2017 年中国 141 部门的优化实验) 构造如下目标结构方阵 \tilde{A} :

$$\tilde{A} = D_w^{-1} A D_w,$$

其中 A 为给定的结构方阵, w 为任意给定的正向量, D_w 是以向量 w 作为对角向量的对角矩阵. 由文献 [2] 中定理 13 可知, 如此构造不会改变结构方阵的稳定性, 即 \tilde{A} 与 A 仍有相同的稳定性.

取 $w = (w_1, w_2, \dots, w_{141})$, 其中

$$w_i = \begin{cases} \tau, & \text{按等级 } (P) \text{ 排序, 第 } i \text{ 号产品排在后 } r \text{ 位;} \\ 1, & \text{其他.} \end{cases}$$

w 刻画了对经济系统每个部门调整的倍数. 该优化实验表示: 将产品按等级 (P) 从高到低排序后, 对排在末尾容易崩溃的 r 名产品适当增加投入, 即对后 r 名产品的投入调整为原来的 τ 倍 ($\tau > 1$), 调整的产品数量由累积 (概率) 分布函数 $F(n)$ 决定 (重点增加对弱势产品的投入).

为了逐步地调整对“弱势产品”的投入, 分别以 0.002, 0.01, 0.025 为阈值, 得到 57 个“弱势产品”的如下分类:

- 当 $0 \leq F(n) \leq 0.002$ 时, $1 \leq n \leq 10$;
- 当 $0.002 < F(n) \leq 0.01$ 时, $11 \leq n \leq 25$;
- 当 $0.01 < F(n) < 0.025$ 时, $26 \leq n \leq 40$;
- 当 $0.025 \leq F(n) \leq 0.05$ 时, $41 \leq n \leq 57$.

下面列出当 τ 分别取 1.1, 1.2, r 分别取 10, 25, 40, 57 时对应的 H 振幅 $\max H$, $\min H$, 以及经过调整后的目标产综 \tilde{u} 与原产综 u 之间的夹角 θ (见表 8).

从表 8 看出, 矩阵 H 的振幅变化很小, H 的元素分布在 1 左右. 随着调整的倍数或调整的产品数量的增加, \tilde{u} 与 u 的夹角增大. 说明对经济系统的调整与优化需要谨小慎微.

进一步对参数 κ 优化. 计算对应的 $\|\kappa\tilde{A} - A\|_\infty$ 与 $\|\kappa\tilde{A} - A\|_F$ 的结果 (见表 9 与表 10), 表中最右侧是使两种距离最小的最优解 κ^* 与 $\bar{\kappa}$. 若使调整后的经济发展速度高于调整前,

需满足 $\kappa < 1$, 所以我们补充计算 $\kappa = 0.9, 0.95$ 的两种范数结果.

表8 H 的振幅及 \tilde{u} 与 u 的夹角

τ	r	$\max H$	$\min H$	θ
1.1	10	1.100000	0.909091	0.000727
	25			0.001645
	40			0.006895
	57			0.009006
1.2	10	1.200000	0.833333	0.001454
	25			0.003289
	40			0.013784
	57			0.017996

表9 对应于不同 κ 的 $\|\kappa\tilde{A}-A\|_{\infty}$

τ	r	$\kappa = 0.9$	$\kappa = 0.95$	$\kappa = \kappa^*$	κ^*
1.1	10	0.086633	0.064974	0.026080	1.039791
	25	0.086633	0.064974	0.026080	1.039791
	40	0.086633	0.064974	0.026080	1.039791
	57	0.089258	0.066944	0.026551	1.040508
1.2	10	0.119120	0.099266	0.049454	1.075452
	25	0.119120	0.099266	0.049454	1.075452
	40	0.119120	0.099266	0.049454	1.075452
	57	0.122730	0.102275	0.050377	1.076860

表10 对应于不同 κ 的 $\|\kappa\tilde{A}-A\|_F$

τ	r	$\kappa = 0.9$	$\kappa = 0.95$	$\kappa = \bar{\kappa}$	$\bar{\kappa}$
1.1	10	0.343628	0.189043	0.069244	1.004739
	25	0.369855	0.221022	0.102641	1.011330
	40	0.383422	0.237664	0.120182	1.014452
	57	0.413032	0.270629	0.142948	1.022853
1.2	10	0.368514	0.225272	0.127598	1.007991
	25	0.422565	0.290208	0.190175	1.019310
	40	0.450889	0.324100	0.224457	1.024336
	57	0.507802	0.385307	0.269084	1.039039

表9和表10中的最优解 κ^* 和 $\bar{\kappa}$ 均大于1, 但仅仅比1大一点, 保证了经济系统的稳定性.

例6 (2017年中国42部门的优化实验) 仿照例5, 我们给出2017年中国42部门的结构优化结果.

分别以0.002, 0.01, 0.025为阈值, 得到16个“弱势产品”的如下分类:

- 当 $0 \leq F(n) \leq 0.002$ 时, $1 \leq n \leq 4$;
- 当 $0.002 < F(n) \leq 0.01$ 时, $5 \leq n \leq 9$;
- 当 $0.01 < F(n) < 0.025$ 时, $10 \leq n \leq 13$;
- 当 $0.025 \leq F(n) \leq 0.05$ 时, $14 \leq n \leq 16$.

列出当 τ 分别取 1.1, 1.2, r 分别取 4, 9, 13, 16 时对应的 H 振幅 $\max H$, $\min H$, 及 \tilde{u} 与 u 之间的夹角 θ (见表 11).

对应的 $\|\kappa\tilde{A} - A\|_\infty$ 与 $\|\kappa\tilde{A} - A\|_F$ 的结果如下 (见表 12 与表 13).

表 11 H 的振幅及 \tilde{u} 与 u 的夹角

τ	r	$\max H$	$\min H$	θ
1.1	4	1.100000	0.909091	0.000631
	9			0.004385
	13			0.010537
	16			0.012166
1.2	4	1.200000	0.833333	0.001262
	9			0.008768
	13			0.021048
	16			0.024292

表 12 对应于不同 κ 的 $\|\kappa\tilde{A} - A\|_\infty$

τ	r	$\kappa = 0.9$	$\kappa = 0.95$	$\kappa = \kappa^*$	κ^*
1.1	4	0.061655	0.046242	0.019348	1.037239
	9	0.061655	0.046242	0.019348	1.037239
	13	0.077035	0.057776	0.022119	1.042573
	16	0.077035	0.057776	0.022119	1.042573
1.2	4	0.084776	0.070647	0.036607	1.070458
	9	0.084776	0.070647	0.036607	1.070458
	13	0.105923	0.088269	0.042043	1.080922
	16	0.105923	0.088269	0.042043	1.080922

表 13 对应于不同 κ 的 $\|\kappa\tilde{A} - A\|_F$

τ	r	$\kappa = 0.9$	$\kappa = 0.95$	$\kappa = \bar{\kappa}$	$\bar{\kappa}$
1.1	4	0.193499	0.105609	0.037052	1.004325
	9	0.201976	0.116266	0.049813	1.007924
	13	0.215961	0.133097	0.066238	1.014058
	16	0.225090	0.143821	0.075855	1.018085
1.2	4	0.206280	0.124336	0.068168	1.007318
	9	0.224179	0.146758	0.092054	1.013421
	13	0.252802	0.180380	0.123491	1.023776
	16	0.271192	0.201336	0.142399	1.030447

6 结论

华罗庚经济最优化理论是陈木法先生前后经历了 34 年研究, 反复推敲, 从国际上通用的、经华罗庚先生重构 (严格区分生产资料与消费资料) 的投入产出法出发, 提出了一套崭新的随机数学方法, 将经济模型优化理论的研究转化为马氏链的研究, 得到的经济优化的一整套全新理论. 本文是我们研究小组关于华罗庚经济最优化理论新探索的继续, 我们研

究了 2017 年中国投入产出模型的稳定性分析、产品排序与分类、预测与调整和结构优化等问题;并将 2007 年、2012 年、2017 年三个年度投入产出模型的产品排序与分类进行对比分析,发现跨越 15 年的三个年度的产品等级排序和分类的非常相似.

致谢: 作者感谢陈木法院士对本文撰写过程中给予的全程指导和帮助,感谢谢颖超教授对本文初稿给出的宝贵意见与建议.

参考文献

- [1] 陈木法. 华罗庚经济最优化理论的新进展 [J]. 应用概率统计, 2022, **38(2)**: 159–178.
- [2] 陈彬, 陈木法, 谢颖超, 等. 经济系统的产品排序与结构优化 [J]. 应用概率统计, 2022, **38(4)**: 475–504.
- [3] CHEN M F, CHEN R R. Top eigenpairs of large scale matrices [J]. *CSIAM Trans Appl Math*, 2022, **3(1)**: 1–25.
- [4] 华罗庚. 计划经济大范围最优化数学理论 [M]. 北京: 中国财政经济出版社, 1987.
- [5] 国家统计局国民经济核算司 (编). 2017 年中国投入产出表 [M]. 北京: 中国统计出版社, 2019.
- [6] 国家统计局国民经济核算司 (编). 2012 年中国投入产出表 [M]. 北京: 中国统计出版社, 2015.
- [7] 国家统计局国民经济核算司 (编). 2007 年中国投入产出表 [M]. 北京: 中国统计出版社, 2009.
- [8] 中国投入产出学会. 投入产出表 1990–2012 [OL]. (2007-01-13)[2023-04-14]. <http://cioa.ruc.edu.cn/zlxz/trccb/index.htm>.

Demonstrational Examples Based on the New Theory of L. K. Hua's Economic Optimization

YANG Ting CHEN Bin ZHOU Qin

Institute of Mathematics, School of Mathematics and Statistics,
Jiangsu Normal University, Xuzhou, 221116, China

Abstract: This paper is a continuation of our new exploration of Hua's economic optimization theory developed in [1,2]. We discuss four issues on the research of China's input-output table of 2017: stability analysis, product rank and classification, prediction and adjustment, structural optimization. Further, applying our method to the China's input-output tables of 2007, 2012 and 2017, we compare and analyze these tables. The results obtained demonstrate the surprising similarity of product ranking and classification of the tables which spanning 15 years. Once again, the reliability of the previous theory is proved.

Keywords: input output method; L. K. Hua's optimization theory; quasi-symmetrizing algorithm; demonstrational research

2020 Mathematics Subject Classification: 91Bxx