华氏经济优化理论新发展的实践

——以中国 2017 年中国投入产出数据为例

周 勤

2023 年数学研究院研究专题报告会

2023 年 2 月 26 日

目录

1. 华罗庚经济优化模型的修正与更新

2. 2017 年投入产出表的产品等级、稳定性分析

3. 未来研究展望

华罗庚经济优化模型的修正与更新

所关心的产品所构成的产综 [固定单位: 瓩, 吨,...]:

$$x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(d)}).$$

考察当前经济的三种数据

- 去年的投入: $x_0 = (x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \ldots, x_0^{(d)})$
- 今年的产出: $x_1 = (x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_1^{(d)})$
- 结构方阵 (消耗系数方阵): $A = (a_{ij})$ (假定时齐). 每生产一个单位的 i 类产品, 需消耗 a_{ij} 个单位的 j 类产品. $x_0 = x_1 A$

  投入产出法

$$x_{n-1} = x_n A,\ \ x_0 = x_n A^n;\ \ x_n = x_0 A^{-n},\ \ n \geqslant 1.$$

非负、不可约矩阵的三大特征

$A=(a_{ij})$. 边: $i \to j$, $a_{ij} > 0$. 连通图 $=$ 不可约.

定理 (Perron-Frobenius 1907, 1912)

每一非负、不可约矩阵都有三大特征:

- 最大特征值 $\rho(A)$ 是正的单重特征值.
- 最大左特征向量 u (行向量) 为正.
- 最大右特征向量 v (列向量) 为正.

左、右正特征向量 u (行) 与 v (列): $\rho = \rho(A)$, $uA=\rho u$, $Av=\rho v$.

$\forall\lambda : |\lambda|\leqslant\rho(A)$, 若 A 含一个正对角元素, 则仅有$<$.

华罗庚基本定理. 左正特征向量法

无消费情形: $\rho(A)=\lambda_{\max}(A)$, 左 u、右 v

- 最好的投入 x_0 = 最大左特征向量 u.
  此时有最佳发展速度 $1/\rho(A)$. 优化 1: $x_0=u$
- 否则，如非周期且 $x_0\neq u$, 则必然走向失衡或崩溃，即

$$\text{失衡时 } T_{x_0}=\inf\{n\colon x_n \text{ 的某个分量} \leqslant 0\}<\infty.$$

$$\text{崩溃时 } T_{x_0}^{+}=\inf\{n\colon x_n \text{ 的某个分量} < 0\}<\infty.$$

前所未有的贡献是优化 2: $T_{x_0}^{+}=\infty \Longrightarrow x_0=u$.

先前平衡解源于不动点定理, 华理论可计算

华氏基本定理. 华的更新. 应数 II, 王元

带消费实用模型 [1985/87 书].消费比例 $\gamma \in (0,1)$.

$$x_0 = x_n A_\gamma^n, \quad n \geqslant 1$$

华文集 9 卷, 2010

$$A_\gamma = \frac{A+\gamma I}{1+\gamma}.$$ 更新: 回到非负阵

$$\rho(A_\gamma) = \frac{\rho(A)+\gamma}{1+\gamma}$$

– –

$\rho := \rho(A) < 1$ (假设). 经济增长速度: $\boxed{\gamma \uparrow \infty ?}$

$$\frac{1}{\rho(A_\gamma)} - 1 = \frac{1-\rho}{\gamma+\rho} \downarrow \frac{1-\rho}{1+\rho} > 0, \quad \gamma \uparrow 1$$

华氏基本定理. 修正与再更新

带消费实用模型 [新]. 消费倍数 $\gamma := \frac{\alpha}{1-\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$.

$$x_0 = x_n A_\alpha^n, \quad n \geqslant 1$$

$A_\alpha = (1-\alpha)A + \alpha I$. 回到非负阵. $A_0 := A$.

[无消费算子 A 与无增长算子 I 的凸组合]

$\rho(A_\alpha) = (1-\alpha)\rho(A) + \alpha$. $A_\alpha (\alpha < 1)$ 同 u, v

倍数: $\gamma = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}$. 增长很小时需倍数很大 [平衡].

旧算子	新算子
$(1-\alpha)A^{-1} + \alpha I$	$(1-\alpha)A + \alpha I$
实矩阵, 整个谱	非负矩阵, 最大特征对

关键变换 (高级: 任意正的 w)

D_w : 以向量 $w = (w^{(k)} : k \in E)$ 作为对角线元素的对角矩阵.

$$\frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})} = D_w^{-1} \frac{A}{\rho(A)} D_w, \qquad w > 0.$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\tilde{A}}{\rho(\tilde{A})}\right)^n = D_w^{-1} \left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^n D_w, \quad n \geqslant 1.$$

$$A \to A_\alpha, \qquad \alpha < 1.$$

关键变换 (初级)

$$u \odot v \qquad\qquad A \to P$$

$$A_w = D_w^{-1} \frac{A}{\rho(A)} D_w, \qquad w > 0.$$

定理 (陈木法 1989/1992)

- A_w 成为转移概率 P 当且仅当 $w = v$.
- P 的左特征向量为 $\mu := u \odot v$, 归一化为 $\pi := u \odot v/(uv)$. 平稳分布 $\pi = \pi P = \pi P^n$.

P 是为理解 "崩溃" 这个神奇要点: 马氏链平稳分布存在唯一:

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \mathbb{1}\pi \text{ (每行均为 } \pi \text{ 的方阵)},$$

先逐点, 然后一致 (因矩阵有限).

$$A_\alpha = (1-\alpha)A + \alpha I \to P_\alpha$$

$$\rho(A_\alpha) = (1-\alpha)\rho(A) + \alpha,$$

$$P_\alpha = D_{v^{-1}} \frac{A_\alpha}{\rho(A_\alpha)} D_v \quad (A_\alpha \text{ 与 } A \text{ 有相同的 } v)$$

$$= (1-\beta)P + \beta I, \beta := \alpha/\rho(A_\alpha).$$

引理 (陈木法 2022)

相应于 A_α, 我们有 P_α 如上. 进而 $P_\alpha\,(\alpha<1)$ 有相同的左、右特征向量 $u \odot v$ 与 $\mathbb{1}$.

产品 (产业) 等级 (排序) 与稳定性分析

了解经济系统首先要掌握 “支柱” 和 “瓶颈” 产业. 基点也许可用投入产出表, 因为它真实地反映出该系统和整体现状. 为此, 自然希望对产品 (产业) 分类、排序. 类比于谷歌对网页的排序 (PageRank), 可考虑对 A 的最大左正特征向量进行排序, 也许可称为产品等级 (ProductRank) 或序. 只是对于网页, 结构矩阵通常要简单些而且常有某种对称性. 经济系统不具有这些特性, 其左、右特征向量可能非常不同. 还有, 通常的网页搜索, 即使排序不太准也不要紧, 但经济系统却太敏感, 需要高精度. 这引导我们使用 P 的左正特征向量 μ, 而不是 A 的 u 来作分类.

使用 P 及 $\mu = u \odot v$ 的两大优点:

- μ 综合了 A 的三大特征, 而 u 仅用其中两个.
- 使用 P 或 A 的稳定性完全重合, 但前者的振幅远小于后者.

应用于特征向量的计算.

P 的迭代列 $\{\mu_n\}$ 与 A 的迭代列 $\{x_n\}$

转换定理/等效原理 $\boxed{\mu_0 = \mu_n P^n,\ x_0 = x_n A^n}$

P 的迭代序列 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ 与 A 的迭代序列 $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ 可通过恒等式

$$\mu_n = \rho(A)^n x_n \odot v, \qquad n \geqslant 0,$$
$$x_n = \rho(A)^{-n} \mu_n \odot v^{-1}, \qquad n \geqslant 0$$

相互转换, 此处 $v^{-1} = (1/v^{(k)} : k \in E)$. 特别地, 使用 A 或 P 计算 $T_{x_0} = T_{\mu_0}$ 的算法等效.

对于每固定的 $\alpha < 1$, P_α 与 A_α 等效.

2017 年 149 部门投入产出表的稳定性分析

投入产出表见中国统计出版社《2017 年中国投入产出表》 149 部门 “基本流量表”. 为保证矩阵 A 不可约, 我们经过一些部门合并后得到 141 个部门. 选取此表的小数点后 6 位有效数字. 所用的矩阵 A 乃是此表的转置.

- 计算 A 的最大特征值 $r := \rho(A)$ 及其右特征向量 v
- 由 A 导出转移概率矩阵 $P = \frac{1}{r}\mathrm{D}_{v^{-1}} A\, \mathrm{D}_{v}$
- 计算 P 的最大左特征向量 μ

由于本例的产品部门数量比较多, 这里给出关于 μ 的四种不同取法 $\{\mu_0^{(j)}\}_{j=1}^4$:

(1) μ 取小数点后 2 位, (2) μ 取小数点后 3 位,

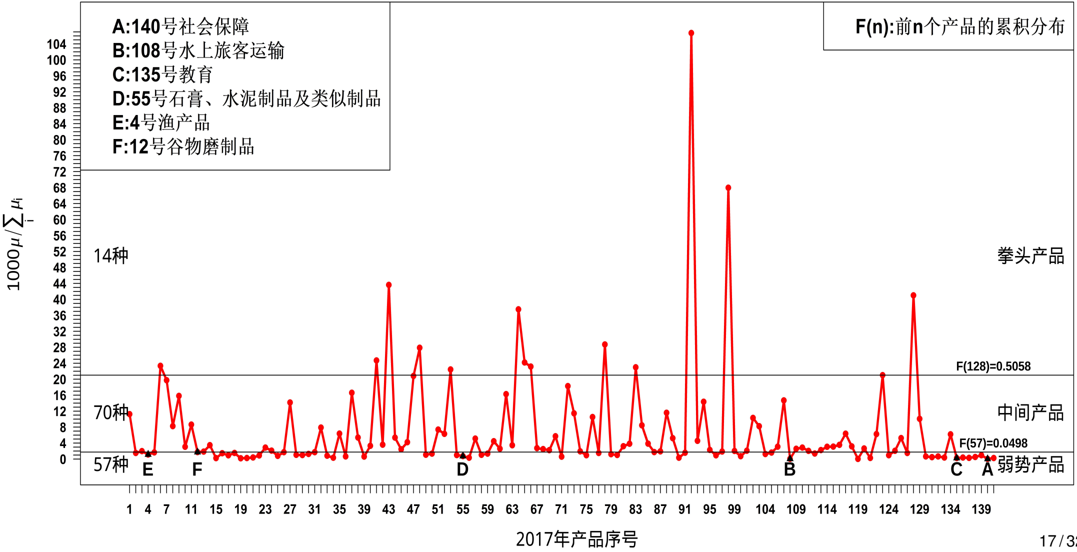
(3) μ 取小数点后 4 位, (4) μ 取小数点后 5 位.

表 1　2017 年 141 部门稳定性测试

T_{μ_0} \ α / μ_0	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$
$\mu_0^{(1)}$	8 140 139	10 140	15 140	58 140
$\mu_0^{(2)}$	10 139	13 139	18 139	74 139
$\mu_0^{(3)}$	13 102	18 102 84	26 102	109 102
$\mu_0^{(4)}$	15 140 139 136 117	20 140 139	29 140 139	117 140

$$T_{\mu_0} = T_{\mu_0}^{+}.$$

2017年141个产品的P的左特征向量图



2017年141个产品的P的左特征向量局部图

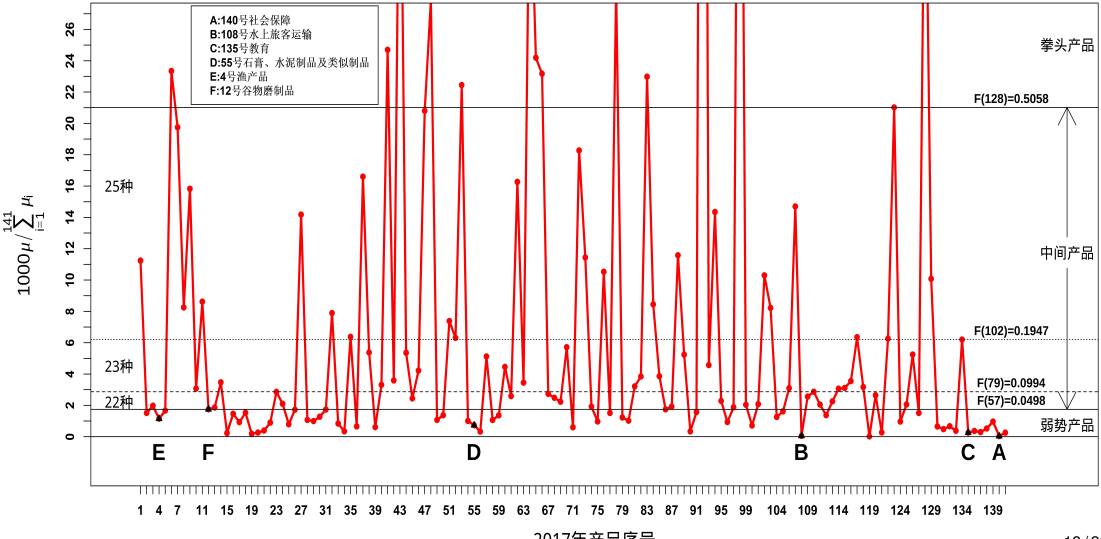


表 2 2017 年 141 产品的拳头产品

等级序 (P)	产品名称	$1000 \times (\mu_k / \sum_i \mu_i)$	产品序
1	电子元器件	106.722264	92
2	电力、热力生产和供应	67.967236	98
3	基础化学原料	43.623580	43
4	商务服务	41.010734	128
5	有色金属及其合金	37.499436	64
6	汽车零部件及配件	28.697625	78
7	专用化学产品和炸药、火工、焰火产品	27.867444	48
8	精炼石油和核燃料加工品	24.696115	41
9	有色金属压延加工品	24.194996	65
10	煤炭开采和洗选产品	23.340218	6
11	金属制品	23.170545	66
12	输配电及控制设备	22.982393	83
13	塑料制品	22.445732	53
14	货币金融和其他金融服务	21.016230	123

表 3 2017 年 141 产品的部分弱势产品

等级序 (P)	产品名称	$1000 \times (\mu_k / \sum_i \mu_i)$	产品序
129	鞋	0.343264	34
130	广播电视设备和雷达及配套设备	0.340420	90
131	砖瓦、石材等建筑材料	0.327486	56
132	新闻和出版	0.292418	137
133	软件服务	0.273989	121
134	乳制品	0.263767	20
135	公共管理和社会组织	0.258142	141
136	教育	0.256931	135
137	糖及糖制品	0.233800	15
138	方便食品	0.192434	19
139	水上旅客运输	0.051777	108
140	社会保障	0.038259	140
141	广播电视及卫星传输服务	0.023737	119

2017 年 42 部门投入产出表的稳定性分析

投入产出表见中国统计出版社《2017 年中国投入产出表》42 部门 “基本流量表”. 留意到该中 35 号产品 “研究和试验发展” 所在行的数据除了主对角元素是非零数值之外, 其他均为零, 无法满足结构方阵的不可约性, 所以对该表部分部门进行合并.

为方便与 2012 年按进行对比, 按照 2012 年的产品部门分类标准, 重新整合出一个新的 2017 年 42 部门 “基本流量表”, 通过计算得出对应的 2017 年 42 部门 “直接消耗系数表”.

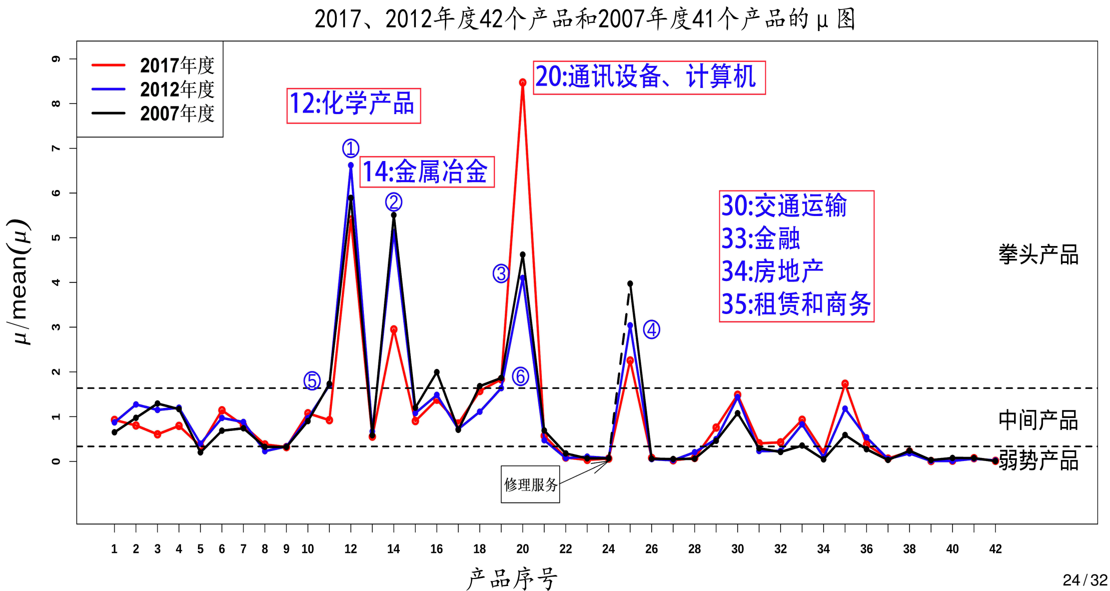
给出关于 μ 的五种不同取法 $\{\mu^{(j)}\}_{j=1}^{5}$:

(1) μ 取小数点后 2 位, (2) μ 取小数点后 3 位,
(3) μ 取小数点后 4 位, (4) μ 取小数点后 5 位,
(5) μ 取小数点后 2 位, 有效位数不少于 4 位.

表 4　2017 年模型的 42 部门的稳定性测试

$\mu_0^{(1)}$	7 40	10 40	14 40	55 40
$\mu_0^{(2)}$	9 40	12 40	17 40	70 40
$\mu_0^{(3)}$	12 40	16 40	23 40	93 40
$\mu_0^{(4)}$	15 40	20 40	29 40	117 40
$\mu_0^{(5)}$	9 42 40 31	12 42 40 31	17 42 40 31	68 40

$$T_{\mu_0} = T_{\mu_0}^{+}.$$

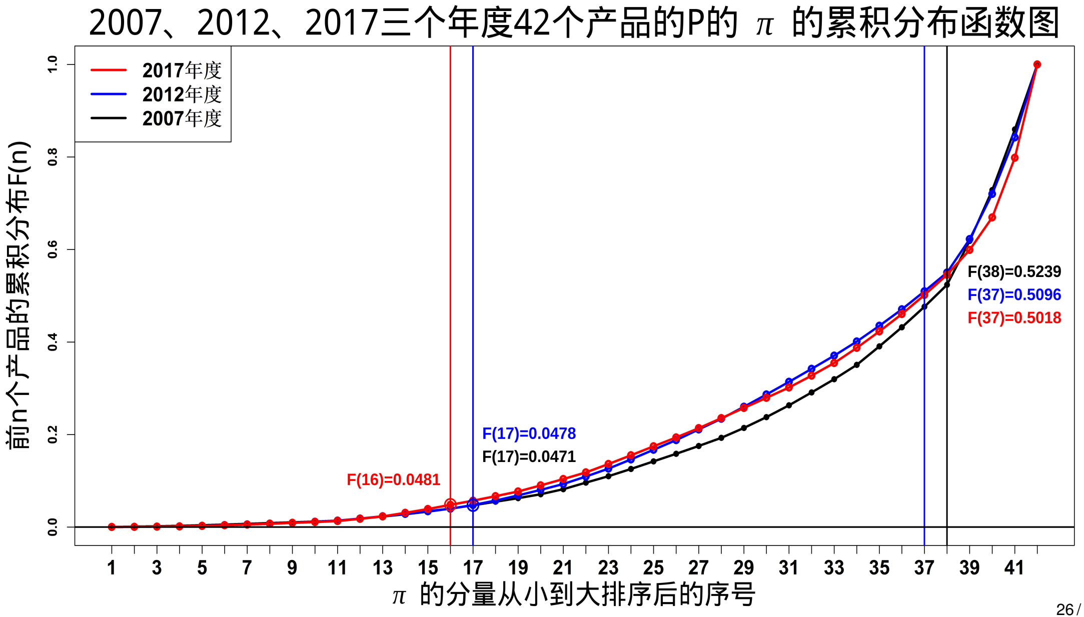

2017、2012年度42个产品和2007年度41个产品的μ图
2017年度
2012年度
2007年度
12:化学产品
20:通讯设备、计算机
14:金属冶金
30:交通运输
33:金融
34:房地产
35:租赁和商务
拳头产品
中间产品
弱势产品
修理服务
①
②
③
④
⑤
⑥
μ/mean(μ)
产品序号

使用 π 对产品分类

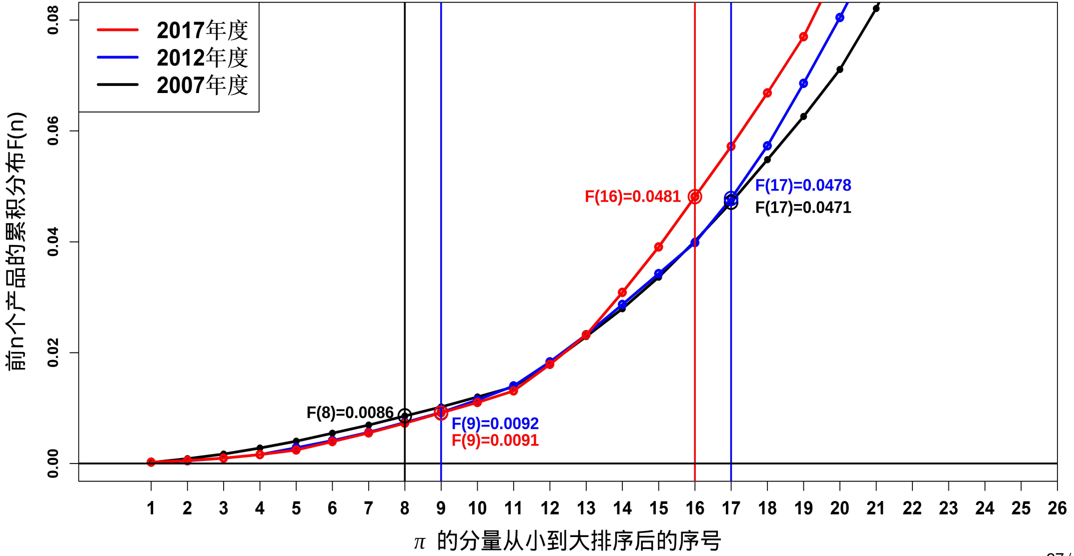
使用 π 有助于产品分区. $\pi = (\pi_k)$ 为 P 的唯一平稳分布 $\pi = \pi P^n, n \geqslant 1$. 对每一 k, π_k 刻画了第 k 个产品对经济系统 A 稳定性的贡献. 将 π 的分量由小到大重排为 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_{42}$. 由此得出 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{n})$: 前 $\boldsymbol{n}$ 个的累积 (概率) 分布函数 [注意三条曲线很接近]:

$$\boldsymbol{F}(0) = 0, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{n}) = \sum_{j=1}^{n} p_j, \boldsymbol{F}(42) = 1.$$

自然, 随后图的左下方 $\leqslant 0.05$ 或更小些的产品可视为弱势产品; 而右上方 $\geqslant 0.5$ 产品为拳头产品. 余者为中间产品.


2007、2012、2017三个年度42个产品的P的 π 的累积分布函数图
2017年度
2012年度
2007年度
前n个产品的累积分布F(n)
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
F(16)=0.0481
F(17)=0.0478
F(17)=0.0471
F(38)=0.5239
F(37)=0.5096
F(37)=0.5018
1
3
5
7
9
11
13
15
17
19
21
23
25
27
29
31
33
35
37
39
41
π 的分量从小到大排序后的序号

2007、2012、2017三个年度42个产品的P的 π 的累积分布函数局部图



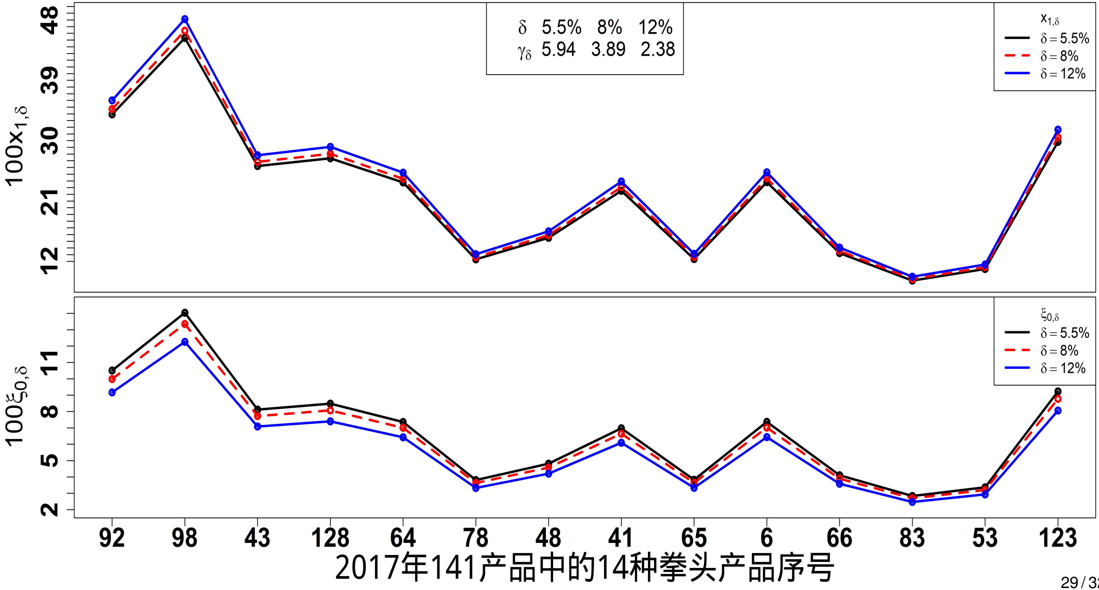
3. 预测与调整及经济结构的优化.

推论 (预测与调整 (陈 2022))

设增长速度为 $\delta \in (0, \ \min\{\rho(A)^{-1} - 1, 1\})$,
令 $\alpha = (1 - \rho(A))^{-1}[(1 + \delta)^{-1} - \rho(A)]$ 及 x_n 为递推方程
$x_n = x_{n+1}[(1 - \alpha)A + \alpha I]$ 的解, 其中 x_0 为预定初值. 则第 $n+1$ 年的可用消费量为

$$\xi_n = \frac{1 - (1 + \delta)\rho(A)}{\delta}(x_{n+1} - x_n).$$

反之, 由第 $n+1$ 年的消费不超过 ξ_n 可确定最大增长速度 δ.



δ 5.5% 8% 12%
γδ 5.94 3.89 2.38
x1,δ
δ = 5.5%
δ = 8%
δ = 12%
100x1,δ
48
39
30
21
12
ξ0,δ
δ = 5.5%
δ = 8%
δ = 12%
100ξ0,δ
11
8
5
2
92 98 43 128 64 78 48 41 65 6 66 83 53 123
2017年141产品中的14种拳头产品序号

未来研究展望

- 把华罗庚经济最优化理论的新发展理论应用于更多场景 (部门, 产业, 地区, 公司,......)
- 编写相应的软件包, 方便更多人使用
- 进一步研究经济结构的优化理论
- 编写华罗庚经济最优化理论的新发展理论及应用的书

参考文献

- 陈木法 (2022): 华罗庚经济最优化理论的新进展. 应用概率统计 38(2): 159-178.
- 陈彬, 陈木法, 谢颖超, 杨婷, 周勤 (2022):经济系统的产品排序与结构优化. 应用概率统计 38 (4): 475-504.
- 中国投入产出学会: http://cioa.ruc.edu.cn/资料下载/投入产出表 1990-2012.
- 国家统计局国民经济核算司, 2017 年中国投入产出表, 中国统计出版社.

谢谢大家!