# 非时齐马氏过程的遍历性和谱隙估计

孙晓斌

(江苏师范大学)

数学研究院开题报告会

2023年2月26日

- 非时齐马氏过程的遍历性
- 非时齐扩散过程的谱隙估计
- 多尺度非时齐马氏过程的渐近行为

- 研究背景：目前，关于时间齐次马氏过程的长时间行为有相当多结果了，例如可以利用Lyapunov型条件、泛函不等式、概率的耦合方法等来得到遍历性或进一步的指数遍历性.

$$\lim_{t\to\infty}\|P_t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\|=0,\quad x\in E,$$

其中$\pi$为唯一的不变概率测度.

# 一、非时齐马氏过程的遍历性

- 研究背景：目前，关于时间齐次马氏过程的长时间行为有相当多结果了，例如可以利用Lyapunov型条件、泛函不等式、概率的耦合方法等来得到遍历性或进一步的指数遍历性.

$$\lim_{t\to\infty} \|P_t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\| = 0, \quad x \in E,$$

其中$\pi$为唯一的不变概率测度.

　然而对于非时齐马氏过程，一般很难去刻画不变测度或者长时间的稳定性等.

# 一、非时齐马氏过程的遍历性

- 研究背景：给定$\mathbb{S} = \{1, 2, \ldots\}$值非时齐马氏链，$\{P(m, i; m+n, k)\}_{i,k\in\mathbb{S}}$为转移概率矩阵.

- **研究背景**：给定$\mathbb{S}=\{1,2,\ldots\}$值非时齐马氏链，$\{P(m,i;m+n,k)\}_{i,k\in\mathbb{S}}$为转移概率矩阵.

**定义1**：若对于$\forall m\geqslant 0, i,j,k\in\mathbb{S}$,

$$\lim_{n\to\infty}[P(m,i;m+n,k)-P(m,j;m+n,k)]=0,$$

则称$\{X_n\}_{n\geqslant 0}$为弱遍历. (Kolmogorov, 1931)

# 一、非时齐马氏过程的遍历性

- **研究背景**：给定$\mathbb{S}=\{1,2,\ldots\}$值非时齐马氏链, $\{P(m,i;m+n,k)\}_{i,k\in\mathbb{S}}$为转移概率矩阵.

定义1：若对于$\forall m\geqslant 0,i,j,k\in\mathbb{S}$,

$$\lim_{n\to\infty}[P(m,i;m+n,k)-P(m,j;m+n,k)]=0,$$

则称$\{X_n\}_{n\geqslant 0}$为弱遍历. (Kolmogorov, 1931)

定义2：若对于$\forall m\geqslant 0$, $i,j\in\mathbb{S}$,

$$\lim_{n\to\infty}P(m,i;m+n,j)=\pi(m,j),$$

则称$\{X_n\}_{n\geqslant 0}$为强遍历.

# 一、非时齐马氏过程的遍历性

- **拟研究内容**：给定$E$值非时齐马氏过程$X_t$, $\{P(s,x;t,\cdot), s \leqslant t, x \in E\}$为其转移概率核.

- 拟研究内容：给定$E$值非时齐马氏过程$X_t$，$\{P(s,x;t,\cdot), s\leqslant t, x\in E\}$为其转移概率核.

定义3: 若对于$\forall s\geqslant 0$, $x,y\in E$,

$$\lim_{t\to\infty} W_2(P(s,x;t,\cdot),P(s,y;t,\cdot))=0,$$

则称$\{X_t\}_{t\geqslant 0}$为$W_2$弱遍历.

- 拟研究内容：给定$E$值非时齐马氏过程$X_t$, $\{P(s,x;t,\cdot), s \leqslant t, x \in E\}$为其转移概率核.

定义3: 若对于$\forall s \geqslant 0$, $x, y \in E$,

$$\lim_{t\to\infty} W_2(P(s,x;t,\cdot), P(s,y;t,\cdot)) = 0,$$

则称$\{X_t\}_{t\geqslant 0}$为$W_2$弱遍历.

定义4: 若存在一族概率测度$\{\mu_s\}_{s\geqslant 0}$使得对于$\forall s \geqslant 0, x \in E$,

$$\lim_{t\to\infty} W_2(P(s,x;t,\cdot), \mu_s) = 0,$$

则称$\{X_t\}_{t\geqslant 0}$为$W_2$强遍历.

- 拟研究内容：例如考虑随机系统：

$$\boldsymbol{dX_t = f(t, X_t)dt + dW_t,} \tag{1}$$

这里$(\boldsymbol{W_t})_{t\geqslant 0}$ 为1-维标准布朗运动.

# 一、非时齐马氏过程的遍历性

- 拟研究内容：例如考虑随机系统：

$$dX_t = f(t, X_t)dt + dW_t, \qquad (1)$$

这里$(W_t)_{t\geqslant 0}$ 为1-维标准布朗运动.

显然，方程(1)的解$(X_t)_{t\geqslant 0}$为一个非时齐的马氏过程. 考虑周期系数($f(t,x) = f(t+t_0, x)$), 周期半群等办法研究解的长时间行为.

- 拟研究内容：例如考虑随机系统：

$$dX_t = f(t, X_t)dt + dW_t, \tag{1}$$

这里$(W_t)_{t\geqslant 0}$ 为1-维标准布朗运动.

显然，方程(1)的解$(X_t)_{t\geqslant 0}$为一个非时齐的马氏过程. 考虑周期系数($f(t,x) = f(t+t_0,x)$)，周期半群等办法研究解的长时间行为.

但是，如果$\lim_{t\to\infty} f(t,x) = \bar{f}(x)$ (例如考虑$f(t,x) = (t+1)^{-1} - x$)，因而很自然会期许解$(X_t)_{t\geqslant 0}$ 的长时间行为会类似于如下时间齐次的方程的解

$$d\bar{X}_t = \bar{f}(\bar{X}_t)dt + dW_t. \tag{2}$$

- 拟研究内容：假设$\mu$为方程(2)唯一不变测度. 我们观察到:

$$\begin{aligned}W_2(P(s,x;t,\cdot),\mu)\leqslant &W_2(P(s,x;t,\cdot),\bar{P}_{t-s}(x,\cdot))\\&+W_2(\bar{P}_{t-s}(x,\cdot),\mu),\end{aligned}$$

其中$\bar{P}_{t-s}(x,\cdot)$为方程(2)的转移概率核.

- **拟研究内容**：假设$\mu$为方程(2)唯一不变测度．我们观察到:

$$W_2(P(s,x;t,\cdot),\mu) \leqslant W_2(P(s,x;t,\cdot),\bar{P}_{t-s}(x,\cdot)) + W_2(\bar{P}_{t-s}(x,\cdot),\mu),$$

其中$\bar{P}_{t-s}(x,\cdot)$为方程(2)的转移概率核．

前者的处理可以通过研究不同漂移系数的弱遍历性来得到．

- 拟研究内容：假设$\mu$为方程(2)唯一不变测度.
  我们观察到:

$$W_2(P(s,x;t,\cdot),\mu) \leqslant W_2(P(s,x;t,\cdot),\bar{P}_{t-s}(x,\cdot)) + W_2(\bar{P}_{t-s}(x,\cdot),\mu),$$

其中$\bar{P}_{t-s}(x,\cdot)$为方程(2)的转移概率核.

前者的处理可以通过研究不同漂移系数的弱遍历性来得到.

后者的处理可以转化为研究经典时齐马氏过程的强遍历性得到.

- 可能会面临的难点与困难：

# 一、非时齐马氏过程的遍历性

- 可能会面临的难点与困难：
  1. 如何合理的定义非时齐马氏过程的遍历性?

# 一、非时齐马氏过程的遍历性

- 可能会面临的难点与困难：
  1. 如何合理的定义非时齐马氏过程的遍历性?
  2. 如何寻找有力的工具来证明遍历性?

# 一、非时齐马氏过程的遍历性

- 可能会面临的难点与困难:
  1. 如何合理的定义非时齐马氏过程的遍历性?
  2. 如何寻找有力的工具来证明遍历性?
  3. 所得的遍历结果如何应用于一些相关问题.

# 一、非时齐马氏过程的遍历性

- 可能会面临的难点与困难:
  1. 如何合理的定义非时齐马氏过程的遍历性?
  2. 如何寻找有力的工具来证明遍历性?
  3. 所得的遍历结果如何应用于一些相关问题.
- 可能用到的学科知识: 耦合方法

- 研究背景：定义二阶微分算子

$$\mathscr{L} = \sum_{i,j} a_{ij}(x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_i b_i(x)\partial_i$$

的谱隙为

$$\mathrm{gap}(\mathscr{L}) := \inf\{-(\mathscr{L}f, f)_\pi : f \in \mathscr{D}(\mathscr{L}), \pi(f) = 0, \|f\|_{L^2(\pi)=1}\}.$$

- **研究背景**：定义二阶微分算子

$$\mathscr{L} = \sum_{i,j} a_{ij}(x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_i b_i(x)\partial_i$$

的谱隙为

$$\mathrm{gap}(\mathscr{L}) := \inf\{-(\mathscr{L}f, f)_\pi : f \in \mathscr{D}(\mathscr{L}), \pi(f) = 0, \|f\|_{L^2(\pi)=1}\}.$$

$\mathrm{gap}(\mathscr{L})$可以用来刻画指数收敛：

$$\|P_t f - \pi(f)\|_{L^2(\pi)} \leqslant \|f - \pi(f)\| e^{-\epsilon t}, t \geqslant 0.$$

事实上，可以证明$\epsilon_{max} = \mathrm{gap}(\mathscr{L})$.

# 二、非时齐扩散过程的谱隙估计

- 研究背景：利用耦合方法，陈木法院士和王凤雨教授[Estimation of spectral gap for elliptic operators, Trans. Amer. Math. Soc. 1997]得到了谱隙下界的变分公式：
  对于任意的$f \in C^2(\mathbb{R})$满足$f(x) > 0$，则有

$$\mathrm{gap}(\mathscr{L}) \geqslant \inf_x [(-af' - bf)'/f](x).$$

- 研究背景：利用耦合方法，陈木法院士和王凤雨教授[Estimation of spectral gap for elliptic operators, Trans. Amer. Math. Soc. 1997]得到了谱隙下界的变分公式：
  对于任意的$f \in C^2(\mathbb{R})$满足$f(x) > 0$，则有

$$\text{gap}(\mathscr{L}) \geqslant \inf_x [(-af' - bf)'/f](x).$$

  随后，陈院士(Basic estimates of stability rate for one-dimensional diffusions, Lecture Notes in Statistics, 2012)得到了

$$k^{-1}/4 \leqslant \text{gap}(\mathscr{L}) \leqslant k^{-1}.$$

# 二、非时齐扩散过程的谱隙研究

- 拟研究内容：我们拟考虑非时齐扩散过程的生成子

$$\mathscr{L}_t = \sum_{i,j} a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_i b_i(t,x)\partial_i$$

的谱隙估计和渐近行为.

- 拟研究内容：我们拟考虑非时齐扩散过程的生成子

$$\mathscr{L}_t = \sum_{i,j} a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_i b_i(t,x)\partial_i$$

的谱隙估计和渐近行为.

$$\begin{aligned}\mathrm{gap}(\mathscr{L}_t) = \ &\inf\{-(\mathscr{L}_t f, f)_{\mu_t} : f \in \mathscr{D}(\mathscr{L}_t),\\ &\mu_t(f) = 0, \|f\|_{L^2(\mu_t)=1}\},\end{aligned}$$

这里 $\mu_t(dx) := \frac{1}{C_t a(t,x)} e^{\int_0^x \frac{b(t,y)}{a(t,y)}dy} dx$,

$$C_t := \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{a(t,x)} e^{\int_0^x \frac{b(t,y)}{a(t,y)}dy} dx < \infty.$$

- **拟研究内容**：
  第一步考虑

$$\begin{aligned} a(t,x) &= \varphi(t)a(x) \\ b(t,x) &= \psi(t)b(x). \end{aligned}$$

- **拟研究内容：**
  第一步考虑

$$a(t,x) = \varphi(t)a(x)$$
$$b(t,x) = \psi(t)b(x).$$

第二步考虑:

$$a(t,x) \asymp \varphi(t)a(x)$$
$$b(t,x) \asymp \psi(t)b(x).$$

- **拟研究内容**:
  第一步考虑

$$\boldsymbol{a(t,x) = \varphi(t)a(x)}$$
$$\boldsymbol{b(t,x) = \psi(t)b(x).}$$

第二步考虑:

$$\boldsymbol{a(t,x) \asymp \varphi(t)a(x)}$$
$$\boldsymbol{b(t,x) \asymp \psi(t)b(x).}$$

第三步考虑:

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{gap}(\mathscr{L}_t) = \mathrm{gap}(\mathscr{L})$$

- 可能会面临的难点与困难：非时齐扩散过程不再存在不变测度$\pi$;寻找合适的特征函数(依赖$t$)作为距离函数.
- 可能用到的学科知识：耦合方法,迭代技巧

- **研究背景**: 考虑如下多尺度随机微分方程:

$$\begin{cases} dX_t^\epsilon = b(X_t^\epsilon, Y_t^\epsilon)dt + \sigma(X_t^\epsilon, Y_t^\epsilon)dW_t, \\ dY_t^\epsilon = \frac{1}{\epsilon} f(X_t^\epsilon, Y_t^\epsilon)dt + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} g(X_t^\epsilon, Y_t^\epsilon)dW_t, \end{cases}$$

其中系数的相互牵涉使系统的研究极其复杂, 因此寻求一个简化方程来刻画系统在长时间尺度上的演化是极其有意义的, 即研究慢分量$X_t^\epsilon$以某种方式收敛到某个具体方程的解:

$$d\bar{X}_t = \bar{b}(\bar{X}_t)dt + \bar{\sigma}(\bar{X}_t)dW_t.$$

- 研究背景：同时，大家也很关心收敛速度如何？是否能到达最优？

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}|X_t^\epsilon - \bar{X}_t|^2 \leqslant C_T \epsilon^{\gamma}.$$

- 研究背景：同时，大家也很关心收敛速度如何？是否能到达最优？

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}|X_t^\epsilon - \bar{X}_t|^2 \leqslant C_T \epsilon^\gamma.$$

$\gamma$的最优值一般依赖噪声以及系数的正则性.

# 三、多尺度非时齐马氏过程的渐近行为

- 研究背景：同时, 大家也很关心收敛速度如何? 是否能到达最优?

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}|X_t^\epsilon - \bar{X}_t|^2 \leqslant C_T \epsilon^{\gamma}.$$

$\gamma$的最优值一般依赖噪声以及系数的正则性.

例如, 当噪声为布朗运动时, 通常$\gamma = 1/2$. 当噪声为$\alpha$稳定过程时, 通常$\gamma = 1 - 1/\alpha$.

# 三、多尺度非时齐马氏过程的渐近行为

- 拟研究内容：我们拟考虑如下多尺度时间依赖的随机微分方程:

$$\begin{cases} dX_t^\epsilon = b(t, X_t^\epsilon, Y_t^\epsilon)dt + \sigma(t, X_t^\epsilon, Y_t^\epsilon)dW_t, \\ dY_t^\epsilon = \frac{1}{\epsilon} f(t/\epsilon, X_t^\epsilon, Y_t^\epsilon)dt + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} g(t/\epsilon, X_t^\epsilon, Y_t^\epsilon)dW_t. \end{cases}$$

在此时的情况下，最优收敛速度的阶数$\gamma$会有本质的改变. (周期系数, S. Cerrai, A. Lunardi, 2017)

- 拟研究内容：我们拟先考虑：

$$
\begin{cases}
dX_t^\epsilon = b(X_t^\epsilon, Y_t^\epsilon)dt + dW_t, \\
dY_t^\epsilon = \frac{1}{\epsilon}\alpha(t/\epsilon) f(Y_t^\epsilon)dt + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\alpha(t/\epsilon)^{1/2} dW_t.
\end{cases}
$$

- 拟研究内容：我们拟先考虑：

$$\begin{cases} dX_t^\epsilon = b(X_t^\epsilon, Y_t^\epsilon)dt + dW_t, \\ dY_t^\epsilon = \frac{1}{\epsilon}\alpha(t/\epsilon)f(Y_t^\epsilon)dt + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\alpha(t/\epsilon)^{1/2}dW_t. \end{cases}$$

在合适的假设条件下可证明：

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}|X_t^\epsilon - \bar{X}_t|^2 \leqslant C_T\epsilon^2 \left[\int_0^{1/\epsilon} \alpha^{-1}(s)ds\right].$$

- 拟研究内容：我们拟先考虑：

$$\begin{cases} dX_t^\epsilon = b(X_t^\epsilon, Y_t^\epsilon)dt + dW_t, \\ dY_t^\epsilon = \frac{1}{\epsilon}\alpha(t/\epsilon)f(Y_t^\epsilon)dt + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\alpha(t/\epsilon)^{1/2}dW_t. \end{cases}$$

在合适的假设条件下可证明：

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}|X_t^\epsilon - \bar{X}_t|^2 \leqslant C_T\epsilon^2 \left[\int_0^{1/\epsilon} \alpha^{-1}(s)ds\right].$$

例如，取$\alpha(t) = (1+t)^\gamma$，当$\gamma \in (-1, \infty)$，则强收敛阶数为$\min\{1, \frac{1+\gamma}{2}\}$.

- 拟研究内容：进一步的，可以考虑中心极限型定理:

$$Z^{\epsilon} := \frac{X^{\epsilon} - \bar{X}}{\epsilon\left[\int_0^{1/\epsilon} \alpha^{-1}(s)ds\right]^{1/2}} \to Z$$

在弱意义下，当$\epsilon \to 0$. 如何显示刻画$Z$满足的具体方程.

谢谢各位老师的聆听，请批评指正！