2023年数学研究院研究专题报告会

# 彩色图像鲁棒填充问题的随机化算法收敛性理论

贾志刚

江苏师范大学

2023 年 2 月 26 日

# 目录

# 1. 重点研究内容

彩色图像鲁棒填充问题

- 数学模型与可解性
- 随机化算法与收敛性
- 应用：医学图像处理

# 2. 研究背景与研究意义

## 研究背景

◆ 压缩感知（Compressed Sensing/Sampling, Ax=b）

如果信号是稀疏的，那么它可以由远低于采样定理要求的采样点重建恢复。

- E.J. Candés, J. Romberg and T. Tao, Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information, *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 52, no. 2, pp. 489-509, Feb. 2006. (arXiv 2004)
- D.L. Donoho, Compressed sensing, *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 52, no. 4, pp. 1289-1306, April 2006.（2022年获IEEE信号处理奖，“For groundbreaking contributions to sparse signal recovery and compressed sensing ”）

**IEEE Jack S. Kilby Signal Processing Medal**


**Emmanuel Candès, Terence Tao, and Justin Romberg**

“For groundbreaking contributions to compressed sensing.”

2021年陶哲轩等人获得IEEE信号处理奖

获奖理由：对压缩感知的突破性贡献

# 2. 研究背景与研究意义

## 研究背景

◆ 矩阵补全（Matrix Completion, SVT, Robust PCA）

通过解凸优化问题恢复低秩矩阵。

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \operatorname{rank}(\boldsymbol{X}) \\ \text{subject to} \quad & X_{ij} = M_{ij} \quad (i,j) \in \Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \|\boldsymbol{X}\|_* \\ \text{subject to} \quad & X_{ij} = M_{ij} \quad (i,j) \in \Omega \end{aligned}$$

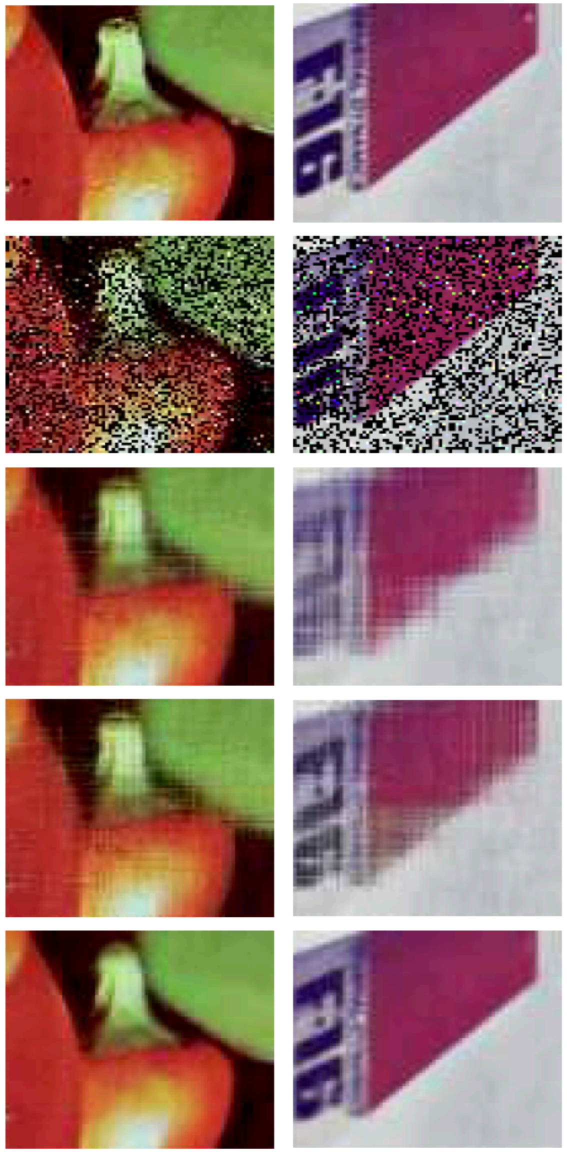
$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \|L\|_* + \lambda \|S\|_1 \\ \text{subject to} \quad & \mathcal{P}_{\Omega_{\text{obs}}}(L+S) = Y \end{aligned}$$

- ◻ E.J. Candés, B. Recht, Exact matrix completion via convex optimization, Found Comput Math. 9(6), 717-772, 2009.
- ◻ J. Cai, E.J. Candés, Z. Shen, A singular value thresholding algorithm for matrix completion. SIAM J Optim. 20(4), 1956-1982, 2010.
- ◻ E.J. Candés, X. Li, Y. Ma, Wright J. Robust principal component analysis? J ACM, 58(3), Article No. 11, 2011.

# 2. 研究背景与研究意义

## 研究背景

- ◆ 四元数矩阵/张量补全（QMC/TC）
  - □ Z. Jia, M. K. Ng, G. Song, Robust quaternion matrix completion with applications to image inpainting, Numer. Linear Algebra Appl., 26 (4), e2245, 2019.
  - □ J. Jiang, M. K. Ng, Exact tensor completion from sparsely corrupted observations via convex optimization, Aug. 2017, arXiv:1708.00601.
- ◆ 彩色图像/视频填充（Color Image/Video Inpainting）
  - □ Z. Jia, Q. Jin, M. K. Ng, X. -L. Zhao, Non-local robust quaternion matrix completion for large-scale color image and video inpainting, IEEE Trans. Image Process., vol. 31, pp. 3868-3883, 2022.



原图

观测图

QMC

TC

NSS-QMC

# 2. 研究背景与研究意义

## 研究意义

- ◆ 研究课题：含强噪声的彩色图像鲁棒填充问题
- ◆ 理论意义：构建新的数学模型与求解方法
- ◆ 应用价值：临床医学图像处理

# 2. 研究背景与研究意义

## 研究意义

- 利用超低剂量CT图像进行三维重建和可视化，将复杂的三维器官结构直观地显示出来

- 有助于医生进行全面而准确的分析，提高医疗诊断水平

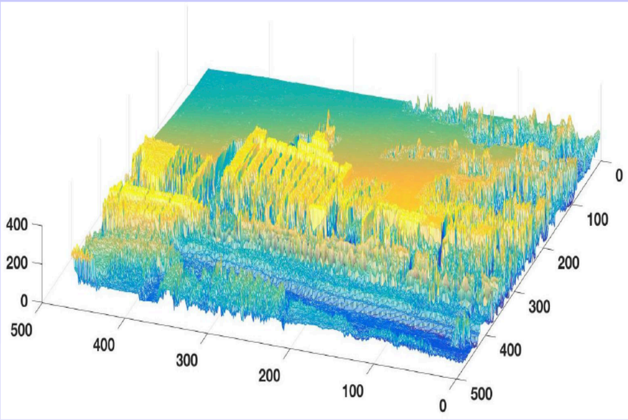
# 3. 学科知识与研究基础

## 图像的数学表示

◆ 灰色图像:

$$u(x,y),\ (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

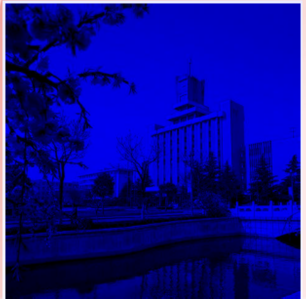
$$L(i,j) = u(x_i, y_j),\quad (x_i, y_j) \in \Omega$$




◆ 彩色图像:

$$\mathbf{u}(x,y) \rightarrow u_1(x,y),\cdots,u_c(x,y)$$

$$\mathbf{L} \rightarrow [L_r, L_g, L_b],\quad L_{r/g/b}(i,j) = u_{r/g/b}(x_i, y_j)$$



# 3. 学科知识与研究基础

示例：张量表示 VS 四元数矩阵表示

- 3 阶张量：

$$\mathcal{T}(:,:,1)=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \mathcal{T}(:,:,2)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\mathcal{T}(:,:,3)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}.$$

# 3. 学科知识与研究基础

示例：张量表示 VS 四元数矩阵表示

- 四元数：$\mathbb{Q} := \{q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \mid q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\}$
- 三个虚单位：

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

| $\times$ | $1$ | $i$ | $j$ | $k$ |
|---|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $i$ | $j$ | $k$ |
| $i$ | $i$ | $-1$ | $k$ | $-j$ |
| $j$ | $j$ | $-k$ | $-1$ | $i$ |
| $k$ | $k$ | $j$ | $-i$ | $-1$ |

# 3. 学科知识与研究基础

**示例：张量表示 VS 四元数矩阵表示**

$$\mathcal{T}(:,:,1)=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \mathcal{T}(:,:,2)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\mathcal{T}(:,:,3)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}.$$

- 四元数矩阵：

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}0 & \mathbf{j} & -\mathbf{i}\\ -\mathbf{j} & 0 & \mathbf{k}\\ \mathbf{i} & -\mathbf{k} & 0\end{bmatrix}.$$

$$\left(=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\mathbf{i}+\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\mathbf{j}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{k}\right)$$

# 3. 学科知识与研究基础

示例：张量表示 VS 四元数矩阵表示

- QSVD：

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{j} & -\mathbf{i} \\ -\mathbf{j} & 0 & \mathbf{k} \\ \mathbf{i} & -\mathbf{k} & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{V}^H,$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} & \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{j} \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} & \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} & \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} & \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{j} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} & \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} & \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} \end{bmatrix}.$$

- 最佳秩1逼近：

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{U} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{V}^H = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} -1 & \mathbf{j} & -\mathbf{i} \\ -\mathbf{j} & -1 & \mathbf{k} \\ \mathbf{i} & \mathbf{k} & -1 \end{bmatrix}.$$

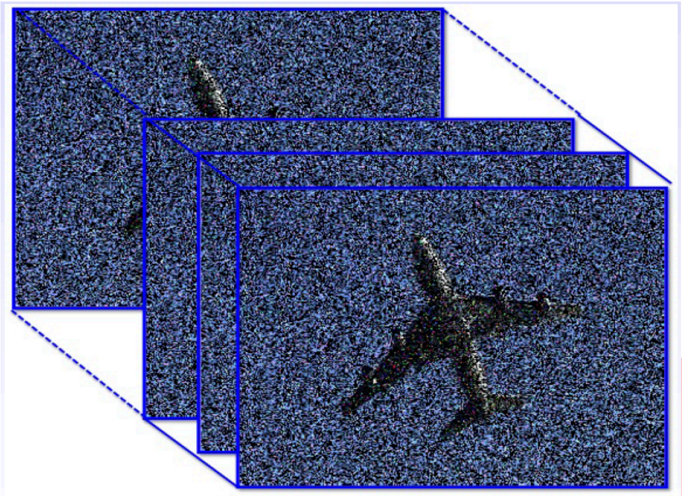
# 3. 学科知识与研究基础

## 图像处理的数学模型

◆ 连续模型（TV正则化）：

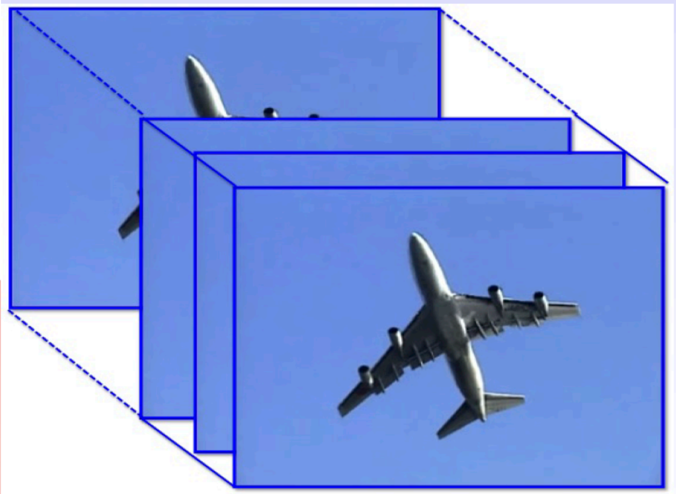
$$z = \mathcal{K}(u) + \eta$$

$$\arg \min_{u \in BV(\Omega)} TV(u) + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (z - u)^2 dxdy$$



◆离散模型（低秩约束）：

$$\min_{\mathbf{L},\, \mathbf{S}} \|\mathbf{L}\|_* + \lambda \|\mathbf{S}\|_1 \ \ \text{s. t.}\ \mathcal{P}_{\Omega}(\mathbf{L} + \mathbf{S}) = \mathbf{X}$$



# 3. 学科知识与研究基础

可解性

连续： ill-posed problem 离散： NP-hard problem

| Regularization | TV | rank |
| --- | --- | --- |
| Meaning | Smooth | Linear dependence |
| Expression | $TV(u)=\int_{\Omega}\|\nabla u\|dxdy$ | $\|\|L\|\|_*=\sum_i \sigma_i(L)$ |
| Problem | Denoising, Deblurring | Inpainting |
| Color image | vectorial TV, SV-TV | ? |
| Color video | vectorial TV | ? |

相关知识点：鲁棒**PCA**、**BV** 空间、微分流形、子空间迭代方法、随机梯度下降法…

# 3. 学科知识与研究基础

## 研究基础

$$\text{SV-TV}(\mathbf{u}) := \int_\Omega \sqrt{|\partial_x \mathbf{u}(x,y)|_s^2 + |\partial_y \mathbf{u}(x,y)|_s^2} + \alpha\sqrt{|\partial_x \mathbf{u}(x,y)|_v^2 + |\partial_y \mathbf{u}(x,y)|_v^2}\,dxdy,$$

◆ SV-TV正则化彩色图像恢复模型:

➢ Z. Jia, M. K. Ng, W. Wang, Color image restoration by saturation-value total variation. SIAM J. Imaging Sci.,12(2), 972-1000, 2019.

$$\min_{u_r(x,y),u_g(x,y),u_b(x,y)\in \mathbb{BV}(\Omega)} \left\{ \text{SV-TV}(\mathbf{u}) + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |(K\star\mathbf{u})(x,y) - \mathbf{z}(x,y)|^2 dxdy \right\}$$

◆ 增量张量 SVD:

➢ A new incremental tensor singular value decomposition model for face recognition, preprint, 2022.

$$\mathcal{A} = \mathcal{U} * \mathcal{S} * \mathcal{V}^T \qquad [\mathcal{A}\ \mathcal{Z}] = \hat{\mathcal{U}}\hat{\mathcal{S}}\hat{\mathcal{V}}^T$$

$$\hat{\mathcal{U}} = [\mathcal{U}_k \quad \mathcal{Q}] * \tilde{\mathcal{U}}, \quad \hat{\mathcal{S}} = \tilde{\mathcal{S}}, \quad \hat{\mathcal{V}} = \begin{bmatrix} \mathcal{V}_k^T & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix} * \tilde{\mathcal{V}}.$$

# 3. 学科知识与研究基础

## 研究基础

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^* = \mathbf{U}\begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^* \\ \mathbf{V}_2^* \end{bmatrix}, \quad \Sigma_1 \in \mathbb{R}^{k\times k}, \quad \mathbf{V}_1 \in \mathbb{Q}^{n\times k}$$

◆ 子空间迭代方法（Arnoldi 方法）：

➢ Z. Jia, M. K. Ng, Structure preserving quaternion generalized minimal residual method. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 42 (2), 616-634, 2021.

$$\mathcal{K}_m(\mathcal{A}, \mathrm{v}) := \mathrm{span}\{\mathrm{v}, \mathcal{A}\mathrm{v}, \ldots, \mathcal{A}^{m-1}\mathrm{v}\} \qquad \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathcal{A}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{V}_m\mathbf{y}) = \mathbf{r}_0 - \mathbf{A}\mathbf{V}_m\mathbf{y}$$

◆ 低秩逼近的随机化方法:

➢ Q. Liu, S. Ling and Z. Jia, Randomized quaternion singular value decomposition for low-rank matrix approximation,  SIAM J. Sci. Comput., 44(2), A870-A900, 2022.

$$\mathrm{E}\|\widehat{\mathrm{A}}_{k+p}^{(0)} - \mathrm{A}\|_F \leq \left(1 + \frac{4k}{4p+2}\right)^{1/2} \left(\sum_{j>k} \sigma_j^2\right)^{1/2}. \qquad \mathrm{E}\|\widehat{\mathrm{A}}_{k+p}^{(0)} - \mathrm{A}\|_2 \leq \left(1 + 3\sqrt{\frac{k}{4p+2}}\right)\sigma_{k+1} + \frac{3e\sqrt{4k+4p+2}}{2p+2}\left(\sum_{j>k}\sigma_j^2\right)^{1/2}.$$

# 4. 面临的难点与困难

- 彩色图像鲁棒填充的随机化算法
  - 问题描述：如何从包含强噪声的观察图中快速恢复低秩彩色图像?
  - 难点：RIP条件、随机化算法收敛性、 Average spectral error、 Deviation bound of  approximation errors 等

# 4. 面临的难点与困难

◆ 彩色图像恢复的最小观测次数

参考文献：


➢ Z. Xu, The minimal measurement number for low-rank matrix recovery, Appl. Comput. *Harmon. Anal*. 44 (2018) 497-508.

➢ B. Gao, Q. Sun, Y. Wang and Z. Xu, Phase retrieval from the magnitudes of affine linear measurements, *Advances in Applied Mathematics* 93 (2018) 121-141.

# 5. 其他问题

- 需要与那些领域的研究人员合作?
- 对研究院与学科的发展有什么样的帮助?
- 其他建议?

谢　谢！