非时齐生灭过程

姚东

江苏师范大学数学研究院

Feb. 2023

报告框架

- （非时齐）生灭过程转移概率的收敛速度
    - 已有的结果和方法
    - 速率满足时空分离条件的非时齐过程
    - 非线性生灭过程
- 高斯系综随机矩阵特征值的最大间距和最小间距

生灭过程

生灭过程是一类基本的离散状态马氏链. 考虑一个粒子在空间 $S := \{0, 1, 2 \ldots, N\}$ 中运动 ($N \leq \infty$). 粒子 t 时刻的位置 $X(t)$ 的 Q-矩阵为

- $n \to n+1$ $(n \geq 0)$: 速率 $b_n(t)$
- $n \to n-1$ $(n \geq 1)$: 速率 $d_n(t)$.

此处 b=birth 表示生的速率, d=death 表示死的速率. 如果 $b_n(t), d_n(t)$ 均不依赖于 t, 则称为时齐生灭过程, 否则称为非时齐生灭过程.

时齐情形下的极限分布与收敛速度

令

$$\mu_0 = 1, \mu_n = \frac{b_0 \cdots b_{n-1}}{d_1 \cdots d_n}, n \geq 1, Z := \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n.$$

由标准随机过程知识可知，令 $p_{i,j}(t) = \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i)$，则对于任意 i, j，以下极限存在

$$\lim_{t \to \infty} p_{i,j}(t) = \pi_j \geq 0.$$

遍历情形 $\pi_j > 0$：此时 $Z < \infty$ 且 $\pi_j = \mu_j / Z > 0$. 非遍历情形：$\pi_j = 0$.
问题：$p_{i,j}(t)$ 收敛到 π_j 的速度多快？是否是指数速度？

$$|p_{i,j}(t) - p_j| = O(\exp(-\alpha t))$$

已有结果

时齐生灭过程的指数收敛速度已有 Chen 在一系列文章中给出完整的解答（包括所有的四种边界条件）. 由狄氏型理论,

- 遍历情形: α 由狄氏型特征值 λ_1 给出
- 非遍历情形: α 由狄氏型特征值 λ_0 给出.

故估计收敛速度的问题等价于估计特征值. 下面简要叙述遍历情形下 Chen 的结果. 定义

$$\mathcal{W} = \{w = (w_0, w_1, \dots) : w_0 = 0, w_i \text{ 严格递增}\}$$

$$\widetilde{\mathcal{W}} = \{w : w_0 = 0,\ \text{存在} k, s.t. w_i = w_{i\wedge k}, w_i \text{ 在} [0, k] \text{ 上严格递增}\}$$

$$I_i(w) = \frac{1}{\mu_i b_i (w_{i+1} - w_i)} \sum_{j \geq i+1} \mu_j w_j, i \geq 0$$

定理 1 (Chen)

假设过程满足遍历性条件.

1. 如下求和形式的变分公式成立 ($\bar{w} = w - \pi(w)$)

$$\inf_{w \in \widetilde{\mathcal{W}}} \sup_{i \geq 0} I_i(\bar{w}) = \lambda_1 = \sup_{w \in W} \inf_{i \geq 0} I_i(\bar{w})^{-1}$$

   此外, 我们也有差分形式的变分公式.

2. $\kappa^{-1}/4 \leq \lambda_1 \leq \kappa^{-1}$, 这里

$$\kappa^{-1} = \inf_{0<n<m<N+1} \left(\left(\sum_{i=0}^{n} \mu_i \right)^{-1} + \left(\sum_{i=m}^{N} \mu_i \right)^{-1} \right) \left(\sum_{j=n}^{m} \frac{1}{\mu_j b_j} \right)^{-1}$$

3. 特别地, $\lambda_1 > 0$ 当且仅当

$$\sup_n \left(\sum_{k \geq n} \mu_k \right) \left(\sum_{j \leq n-1} \frac{1}{\mu_j b_j} \right) < \infty.$$

主要想法和技术

- 耦合技术: classical coupling 等耦合方法可快速证明证明 λ_1 的（差分形式）下界
- 对偶方法： 在 0 (或者 ∞) 处的吸收/反射可以和无穷（或者）0 处的反射/吸收对应.
- 需要用到 λ_0 或 λ_1 对应的特征函数的性质（单调性等）.
- 与 Hardy 型不等式有直接的关联.
- 差分形式便于通过构造测试数列来进行具体下界的计算, 求和形式便于证明是否指数收敛的判别条件。

其他方法 (Van Doorn)

利用马氏链的谱表示 (Karlin-McGregor 公式),

$$p_{i,j}(t) = \mu_j \int_0^{\infty} e^{-xt} Q_i(x) Q_j(x) \psi(dx),$$

这里 Q_n 是一列多项式, 满足

$$b_n Q_{n+1} = (b_n + d_n - x) Q_n - d_n Q_{n-1}, Q_0 = 1, b_0 Q_1 = b_0 + d_0 - x.$$

ψ 是（唯一的）概率测度使得多项式 $Q_n, n \geq 1$ 在 ψ 正交. Van Doorn 研究了 ψ 的支撑集的下界, 从而证明了 λ_1 的差分形式变分表示.

对于一些特殊情形的生灭速率, 可以得到一些转移概率的精确解. 此法在非时齐下也有少数结果（Ohkubo 研究了 $b_n(t) = b(t), d_n(t) = nr(t)$）.

其他方法（Zeifman）

Zeifman 利用微分方程理论，考虑了非时齐情形的生灭过程．假设 $\sup_i(b_i(t)+d_i(t))<\infty$．对于任意概率测度 m，记 $p(s,m;t,\cdot)$ 为从时刻 s 出发且分布为 m 的马氏链在 t 时刻的分布．任取 w_i 一列正实数，$w_{-1}=w_0=1$，Zeifman 等证明了如下结果：

其他方法（Zeifman）

Zeifman 利用微分方程理论，考虑了非时齐情形的生灭过程. 假设 $\sup_i(b_i(t) + d_i(t)) < \infty$. 对于任意概率测度 m, 记 $p(s, m; t, \cdot)$ 为从时刻 s 出发且分布为 m 的马氏链在 t 时刻的分布. 任取 w_i 一列正实数, $w_{-1} = w_0 = 1$,Zeifman 等证明了如下结果：

- 上界：对于任意 m_1, m_2, $\|p(s, m_1; t, \cdot) - p(s, m_2; t, \cdot)\|_{\ell_1}$ 不超过

$$\frac{4}{\inf_n w_n} \exp\left(-\int_s^t \alpha(u)du\right) \sum_{i\geq 1} g_i \left|m_1(i) - m_2(i)\right|,$$

这里 $g_i = \sum_{k\leq i-1} w_i$,

$$\alpha(u) = \inf_{i\geq 0}\left(b_i(t) + d_{i+1}(t) - \frac{w_{i+1}}{w_i} b_{i+1}(t) - \frac{w_{i-1}}{w_i} d_i(t)\right)$$

其他方法（Zeifman）

Zeifman 利用微分方程理论，考虑了非时齐情形的生灭过程．假设 $\sup_i(b_i(t)+d_i(t))<\infty$．对于任意概率测度 m，记 $p(s,m;t,\cdot)$ 为从时刻 s 出发且分布为 m 的马氏链在 t 时刻的分布．任取 w_i 一列正实数，$w_{-1}=w_0=1$,Zeifman 等证明了如下结果：

- 上界：对于任意 m_1,m_2，$\|p(s,m_1;t,\cdot)-p(s,m_2;t,\cdot)\|_{\ell_1}$ 不超过

$$\frac{4}{\inf_n w_n}\exp\left(-\int_s^t \alpha(u)du\right)\sum_{i\ge 1} g_i\left|m_1(i)-m_2(i)\right|,$$

  这里 $g_i=\sum_{k\le i-1} w_i$，

$$\alpha(u)=\inf_{i\ge 0}\left(b_i(t)+d_{i+1}(t)-\frac{w_{i+1}}{w_i}b_{i+1}(t)-\frac{w_{i-1}}{w_i}d_i(t)\right)$$

- 下界：假设 $m_1\le m_2$，类似 $\alpha(u)$ 定义 $\beta(u)$(把 inf 替换为 sup)，

$$\|p(s,m_1;t,\cdot)-p(s,m_2;t,\cdot)\|_{\ell_{1,w}}\ge\exp\left(-\int_s^t\beta(u)du\right)\|m_1-m_2\|_{\ell_{1,w}}$$

时空分离形式的非时齐生灭过程

考虑如下时空分离形式的非时齐生灭过程

$$b_n(t) = f(t)r_n, d_n(t) = g(t)q_n.$$

Gnedenko 和 Solov'ev 证明了, 对于状态空间有限情形, 此马氏链存在极限概率（即 $\lim_{t\to\infty} p_{i,j}(t)$ 存在）的充分必要条件是 (时间变换后的)$f(t)$ 和 $g(t)$ 在积分意义下收敛. 现假设 $f(t) \to f_0$ 并且 $g(t) \to g_0$.

时空分离形式的非时齐生灭过程

考虑如下时空分离形式的非时齐生灭过程

$$b_n(t) = f(t)r_n, d_n(t) = g(t)q_n.$$

Gnedenko 和 Solov'ev 证明了, 对于状态空间有限情形, 此马氏链存在极限概率（即 $\lim_{t\to\infty} p_{i,j}(t)$ 存在）的充分必要条件是 (时间变换后的)$f(t)$ 和 $g(t)$ 在积分意义下收敛. 现假设 $f(t) \to f_0$ 并且 $g(t) \to g_0$.

- 对于有限状态空间, 由 Zeifman 变分公式, 可以推出非时齐链的指数收敛速度和时齐情形速度近似相等.
- 如何推广 Chen 的工作到非时齐情形？(特别是对于一般的状态空间和无界的生灭速率)
- 若 $f(t)$ 和 $g(t)$ 是关于 t 的周期函数, 弱遍历（马氏链本身不一定收敛, 但是长时间行为和初分布渐近独立）的结果和相应速度如何？

带有交互作用的生灭过程-I

考虑如下 L 个交互粒子 $X_1, \dots, X_L$ 构成的系统：每个粒子做生灭过程的运动，状态空间为 $\{1, \dots, N\}$，生灭速率为

$$b(t) = \frac{X_1(t) + \cdots + X_L(t)}{L}, d(t) = \gamma.$$

固定 $T > 0$，则当 $L \to \infty$ 时，此系统的经验测度

$$\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} \delta_{X_i(t)}, 0 \le t \le T$$

会弱收敛到如下非时齐生灭过程 $X(t)$ 的分布：

$$b_n(t) = \mathbb{E}(X(t)), d_n(t) = \gamma.$$

可称为一个非线性生灭过程．普通的马氏过程转移概率满足线性方程，而此模型下转移概率满足的是二次方程组．

考虑 $N=1$ 情形，记 $P(X_t=0)=x_0(t), P(X_t=1)=x_1(t))$.

$$\frac{dx_0(t)}{dt}=(\gamma-x_0(t))(1-x_0(t)).$$

由此可发现一个相变现象

- 若 $\gamma\geq 1$，则 $\forall(x_0(0),x_1(0))$，都有 $(x_0(t),x_1(t))\to(1,0)$. 若 $\gamma>1$，收敛速度是指数的. 若 $\gamma=1$，则收敛速度是多项式的.
- 若 $\gamma<1$，则只要 $(x_0(0),x_1(0))\neq(1,0)$，都有 $(x_0(t),x_1(t))\to(\gamma,1-\gamma)$.

带有交互作用的生灭过程-II

考虑 $N=1$ 情形，记 $P(X_t=0)=x_0(t), P(X_t=1)=x_1(t))$.

$$\frac{dx_0(t)}{dt}=(\gamma-x_0(t))(1-x_0(t)).$$

由此可发现一个相变现象

- 若 $\gamma\geq 1$，则 $\forall(x_0(0),x_1(0))$，都有 $(x_0(t),x_1(t))\to(1,0)$. 若 $\gamma>1$，收敛速度是指数的. 若 $\gamma=1$，则收敛速度是多项式的.
- 若 $\gamma<1$，则只要 $(x_0(0),x_1(0))\neq(1,0)$，都有 $(x_0(t),x_1(t))\to(\gamma,1-\gamma)$.

从 $N\geq 2$ 开始，分析方程的渐近行为似乎有困难（除了局部稳定性可以通过计算 Hessian），实际上，证明 t 时刻分布 $(x_0(t),\ldots,x_L(t))$ 是否收敛似乎都不是很容易！困难点：非线性部分（期望）不是随着时间单调变化的.

随机矩阵特征值间距

考虑实数上的 n 个随机的点, 联合密度 $f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ 等于

$$\frac{1}{C_{n,\beta}} \prod_{i=1}^{n} \exp(-\beta n \lambda_i^2) \prod_{1<i<j<n} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta$$

这里 $\beta > 0$ 是一个参数。此模型称为高斯 β 系综. 物理中最关心 $\beta = 1, 2, 4$ 的情形, 分别对应实对称矩阵, 复共轭矩阵和四元数共轭矩阵。对于高斯 β 系综, 特征根的经验分布当 $n \to \infty$ 时趋于半圆律

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} \mathbf{1}[-2 \le x \le 2].$$

我们拟研究 $\beta = 1, 4$ 时特征值间隙的极值, 即假设 $\lambda_1 \le \cdots \le \lambda_n$, 研究

$$\max_i (\lambda_{i+1} - \lambda_i), \min_i (\lambda_{i+1} - \lambda_i).$$

大间距阶数 $\sqrt{\log n}/n$, 小间距阶数 $n^{-(\beta+2)/(\beta+1)}$.$\beta = 2$ 时结果已证. 困难点: $\beta = 2$ 时密度对应行列式, 而 $\beta = 1, 4$ 时对应 Phaffian, 更复杂。

谢谢！